Juliaverzamelingen en de Mandelbrotverzameling

In de eerste twee colleges hebben we gezien hoe het itereren van een eenvoudige afbeelding tot ingewikkelde verschijnselen leidt. Nu gaan we dit soort afbeeldingen bekijken waarbij we de reële variabele x vervangen door een complexe variabele z. Ook de parameter in de afbeelding wordt nu complex en aangeduid met de letter c. Als afbeelding nemen we

$$f : z \to z^2 + c.$$

Het itereren van f geeft, als we ons beperken tot reële waarden van z en c, dezelfde verschijnselen als het proces $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$. Substitueer maar

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{z_n}{a},$$

dan krijgen we

$$z_{n+1} = z_n^2 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

De parameter c correspondeert dus met a middels

$$c = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Schrijven we z en c in de standaardnotatie met reële en imaginaire delen, d.w.z. $z = x + iy$ en $c = a + ib$ met x en y reële variabelen en a en b reële parameters (a is nu meer de a uit de formule's hierboven), dan definieert f voor elke keuze van a en b een afbeelding

$$(x, y) \to (x^2 - y^2 + a, 2xy + b)$$

van het vlak op zich zelf. Voor een gegeven startwaarde $z_0 = x_0 + iy_0$ definiëren we weer een rij complexe getallen z_1, z_2, z_3, ... door de afbeelding f te itereren:

$$z_1 = f(z_0),\ z_2 = f(z_1),\ z_3 = f(z_2), \ldots.$$

Deze rij complexe getallen correspondeert in het complexe vlak met een rij punten

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots,$$

waarbij (x_{n+1}, y_{n+1}) gegeven wordt door

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a,\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b.$$

Het gedrag van de punten (x_n, y_n) als $n \to \infty$ hangt af van het beginpunt (x_0, y_0) en de parameters a en b.

In wat volgt hebben we twee getallenvlakken: het (x, y)-vlak waar we zien wat het gedrag van de iteraties is en het (a, b)-vlak waarin we de parameters kiezen. De Juliaverzameling

$J(a,b)$ is een figuur die we voor elke keuze van (a,b) kunnen maken in het (x,y)-vlak. De Mandelbrotverzameling M daarintegen is een figuur in het (a,b)-vlak: Hoe $J(a,b)$ eruit ziet hangt in sterke mate af van *of* (a,b) in M ligt en zoja van *waar* (a,b) in M ligt.

Iteratie van de afbeelding $z \to z^2$. Om te zien hoe een en ander in zijn werk gaat beschrijven we de afbeelding eerst in meetkundige termen. We nemen daartoe eerst het geval $(a,b) = (0,0)$. De afbeelding $(x,y) \to (x^2 - y^2, 2xy)$ kan dan eenvoudig in poolcoordinaten worden beschreven. Laat

$$x = r\cos\phi \quad \text{en} \quad y = r\sin\phi,$$

waarbij r de afstand is van het punt (x,y) tot de oorsprong O en ϕ de hoek tussen de positieve x-as en het lijnstuk dat (x,y) met O verbindt. Gebruikmakend van de somformules voor de cosinus en de sinus vinden we dat het beeldpunt $(x^2 - y^2, 2xy)$ op afstand r^2 van de oorsprong komt te liggen met bijbehorende hoek 2ϕ. Anders gezegd, voor r en ϕ komt de afbeelding neer op

$$r \to r^2 \quad \text{en} \quad \phi \to 2\phi.$$

Kwadrateren van complexe getallen is dus niets anders dan het kwadrateren van afstanden en het verdubbelen van hoeken.

N.B. Die hoeken moeten we modulo 2π rekenen, dus eigenlijk hebben we voor wat ϕ betreft de afbeelding $\phi \in [0, 2\pi) \to 2\phi\,(\text{mod}2\pi) \in [0, 2\pi)$, die natuurlijk heel veel lijkt op de afbeelding $x \in [0,1) \to 2x\,(\text{mod}1) \in [0,1)$ die eerder aan de orde is geweest.

Bij iteratie van de afbeelding $z \to z^2$ zien we nu dat met een beginpunt binnen de cirkel $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ de punten naar de oorsprong convergeren terwijl met een beginpunt buiten S de punten wegvliegen naar oneindig. Als we het beginpunt op S kiezen liggen alle iteraties ook op S. Is in dit laatste geval de beginhoek een rationaal veelvoud van 2π, dan zijn alle iteraties uiteindelijk gelijk aan het punt $(1,0)$, maar als de beginhoek een irrationaal veelvoud is van 2π dan zien we dat (meestal) de iteraties kris kras op S komen te liggen.

We concluderen dat S een onder de afbeelding $(x,y) \to (x^2 - y^2, 2xy)$ invariante verzameling is die het (x,y)-vlak in een binnengebied en een buitengebied verdeelt. Beginpunten in het binnengebied geven een ander iteratiegedrag dan beginpunten in het buitengebied. Beginpunten op S geven een ingewikkelder (chaotisch) gedrag. De verzameling S is de Juliaverzameling $J(0,0)$.

Voor $(a,b) = (0,0)$ is het iteratiegedrag met deze observaties grotendeels beschreven en begrepen. Maar net als bij de afbeelding van Verhulst gaat er ook hier een doos van Pandora open als we de parameters gaan variëren. De Juliaverzameling wordt een *fractal* die talloze veranderingen ondergaat en uiteindelijk explodeert als we met (a,b) te ver van de oorsprong in het (a,b)-vlak weglopen. Te ver betekent hier dat we de Mandelbrotverzameling M verlaten. Deze M is een soort catalogus waarin we kunnen aflezen wat er gebeurt bij iteratie van f en ook hoe $J(a,b)$ eruit zal zien.

Stabiliteit van periodieke punten, periodeverveelvoudiging. Bij de afbeelding van Verhulst hebben we gezien dat een periodiek punt $\overline{x}$ met periode n stabiel is als $|f_n'(\overline{x})| < 1$.

We hadden bijvoorbeeld stabiele periodieke punten met periode $n = 2$ voor a tussen 3 en $1 + \sqrt{6}$. Bij $a = 3$ ontstaat het periodieke punt met afgeleide f_2' gelijk aan 1 en bij $a = 1 + \sqrt{6}$ verliest het zijn stabiliteit via een periodeverdubbeling als f_2' gelijk wordt aan -1. Als we het periodieke punt noteren als $\overline{x}(a)$ om duidelijk te maken dat het varieert met a, dan neemt $f_2'(\overline{x}(a))$ op het a-interval $(3, 1 + \sqrt{6})$ waarden aan tussen 1 in $a = 3$ en -1 in $a = 1 + \sqrt{6}$.

Laten we nu eens kijken wat we op deze manier vinden voor de complexe afbeelding $f(z) = z^2 + c$. De dekpunten van f zijn de oplossingen van de vergelijking

$$z^2 + c - z = 0,$$

die we met de wortelformule voor kwadratische vergelijkingen kunnen oplossen. We vinden dan dat

$$z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c}).$$

Hierbij moeten we ons realiseren dat $\sqrt{1 - 4c}$ voor twee elkaar tegengestelde getallen staat.

De dekpunten van f_2 vinden we door de vergelijking

$$(z^2 + c)^2 + c - z = 0$$

op te lossen, waar bij we kunnen gebruiken dat deze vergelijking een factor $z^2 + c - z$ bevat want dekpunten van f zijn ook dekpunten van f_2. De andere factor is $z^2 + z + c + 1$. De punten met periode 2 zijn dus

$$z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3 - 4c}),$$

waarbij we weer twee mogelijkheden voor de wortel hebben. We berekenen nu de afgeleide van f_2 in deze twee punten. Omdat $f_2'(z) = 4cz(z^2 + c)$ krijgen we

$$f_2'(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3 - 4c})) = 4 + 4c.$$

Net als in het reële geval zijn de dekpunten van f_2 stabiel als de absolute waarde van deze afgeleide kleiner is dan 1. M.a.w. ze verliezen hun stabiliteit als

$$|4 + 4c| = 1.$$

Dit is een cirkel in het complexe c-vlak met straal $\frac{1}{4}$ en middelpunt -1. We kunnen deze cirkel parametriseren door $4 + 4c = e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ te stellen. Dan volgt dus

$$c = -1 + \frac{1}{4}e^{i\phi},$$

of, in reële notatie met $c = a + bi$,

$$a = -1 + \frac{1}{4}\cos\phi, \quad b = \frac{1}{4}\sin\phi.$$

Binnen deze cirkel hebben we een stabiel periodiek punt van periode 2.

Nu doen we hetzelfde voor f zelf. We vullen het dekpunt van f in in de afgeleide $f'(z) = 2z$. We vinden

$$f'(\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4c})) = 1+\sqrt{1-4c}.$$

Stellen we de absolute waarde weer gelijk aan 1 door $1+\sqrt{1-4c} = e^{i\phi}$ te nemen, dan volgt

$$1-4c = (e^{i\phi}-1)^2 = e^{2\phi} - 2e^{i\phi} + 1,$$

dus

$$c = \frac{1}{2}e^{i\phi} - \frac{1}{4}e^{2i\phi},$$

of, in reële notatie met $c = a + bi$,

$$a = \frac{1}{2}\cos\phi - \frac{1}{4}\cos 2\phi, \quad b = \frac{1}{2}\sin\phi - \frac{1}{4}\sin 2\phi.$$

Dit is een cardioide. Voor c-waarden in het binnengebied van deze cardioide heeft f een stabiel dekpunt.

We zien dat de cirkel op de cardioide geplakt zit in het punt op de cardioide met $\phi = \pi = \frac{2\pi}{2}$ hetgeen correspondeert met afgeleide $e^{\pi i} = -1$ in een van de twee dekpunten van f. Merk op dat de tweede macht van -1 gelijk is aan 1. Anders gezegd, de afgeleide is een tweedemachtswortel van 1. Laten we c van het binnengebied van de cardioide naar het binnengebied van de cirkel lopen, dan zien we een periodeverdubbeling op treden. Evenzo kunnen we punten op de cardioide nemen met $\phi = \frac{2\pi}{3}$, $\phi = \frac{2\pi}{4}$, $\phi = \frac{2\pi}{5}$, i.e. een derdemachtswortel van 1, een vierdemachtswortel van 1, een vijfdemachtswortel van 1, enzovoort. Verlaten we de cardioide via zo'n punt dan komen we terecht in een gebied met stabiele periodieke banen met periode resp. 3, 4, 5, enzovoort. Elk van deze nieuwe gebieden in het c-vlak wordt weer begrensd door een kromme die geparametriseerd wordt door ϕ corresponderend met afgeleide $e^{\pi i} = -1$ in een van dekpunten van resp. f_3, f_4, f_5, enzovoort. Op elk van deze randen zitten in alle punten waarvoor $\frac{\pi}{2\pi}$ rationaal is weer nieuwe gebiedjes geplakt waarbinnen stabiele periodieke punten bestaan met hogere periode. En vervolgens herhaalt dat zich weer op al die andere gebiedjes. Dit alles vinden we uitgaande van de cardiode waarbinnen we een stabiel dekpunt hebben van f. Bij elke overgang naar een ander gebied hebben we een periodeverveelvoudiging. Maar dat is nog niet het hele verhaal. Er is bijvoorbeeld ook een cardioide waarbinnen f_3 stabiele dekpunten heeft. De cusp van deze cardioide is $c = -\frac{7}{4}$. Ook op deze cardiode zitten weer gebieden met hogere periodes met daarop weer..., enzovoort. Evenzo zijn er cardioides bij 4, 5, ...

Uit al deze aftelbaar oneindig veel gebiedjes met hun rand erbij zien we een gecompliceerde verzameling in het complexe c-vlak ontstaan die de Mandelbrotverzameling wordt genoemd. Nemen we een c-waarde binnen een van deze gebiedjes dan weten we dat er stabiele periodieke punten zijn en dus zijn er ook beginwaarden waarvoor we zien dat de rij z_n uiteindelijk naar deze stabiele periodieke baan gaat. Daarnaast zijn er altijd beginwaarden waarvoor de rij z_n weg vlucht naar oneindig. De beginwaarden die geen van beide doen vormen de Juliaverzameling. Net als bij de afbeelding $z \to z^2$ is dit de rand van de verzameling van beginvoorwaarden die bij iteratie onbegrensde rijen geven. Voor een gegeven $c = a + ib$ kunnen we de Juliaverzameling $J(a, b)$ benaderen door terug te itereren vanuit een vast gekozen startpunt. We rekenen dan eerst het inverse beeld uit van dit punt. Dit geeft twee nieuwe punten. Daarvan nemen we weer het inverse beeld en vinden vier punten, dan acht, zestien, enzovoort. Na n stappen hebben we 2^n punten die als n groter wordt $J(a, b)$ steeds beter benaderen. Voor $a = b = 0$ hebben we gezien dat $J(0, 0)$ een cirkel is. Veranderen we a en b een klein beetje, dan wordt $J(a, b)$ een gesloten kromme die niet meer glad is. Als we de lengte van $J(a, b)$ proberen de meten met een meetlat van lengte a dan blijkt dat met kleinere a de gemeten lengte steeds groter wordt en in de limiet $a \to 0$ zelfs naar oneindig gaat. Verzamelingen met deze eigenschap worden wel fractals genoemd. Ze zitten als het ware in tussen 1-dimensionale verzamelingen zoals lijnen en 2-dimensionale verzamelingen zoals vlakken.

De Mandelbrotverzameling M is per definitie de verzameling van c-waarden waarvoor de Juliaverzameling uit één stuk bestaat. Verlaten we M met c, dan zien we dat de Juliaverzameling een soort stofwolk wordt die alleen maar uit losse punten bestaat. Het is niet precies bekend wat er nog meer in M zit behalve de hierboven beschreven gebiedjes met hun randen. Wel is bekend dat M zelf ook maar uit één stuk bestaat. Om plaatjes van M te maken is het voldoende om alleen startwaarde $z = 0$ te bekijken. De parameter c zit in M precies dan als de rij met startwaarde $z = 0$ begrensd blijft. Zoomen we in op deelverzamelingen van M dan zien we dezelfde patronen zich steeds weer herhalen. Op de werkstations is een programma geinstalleerd waarmee je dit prachtig kunt zien.

Het merendeel van wat we hierboven behandeld hebben is terug te vinden in het door H.W. Broer en F. Verhulst samengestelde boek "Dynamische systemen en chaos" (Epsilon Uitgaven, Utrecht), en met name in het door S.J. van Strien geschreven derde hoofdstuk.

J. Hulshof, 1998.