Iteraties met de afbeelding van Verhulst

We beschouwen de afbeelding

$$f : x \to ax(1-x).$$

Voor een gegeven startwaarde x_0 definiëren we een rij getallen x_1, x_2, x_3, ... door de afbeelding f te itereren:

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2), \ldots$$

Het gedrag van x_n als $n \to \infty$ hangt af van de startwaarde x_0 en de parameter a. We kiezen in het vervolg steeds $0 < x_0 < 1$ en $0 < a \leq 4$. De afbeelding f beeldt dan het interval $[0, 1]$ af op een deelverzameling van $[0, 1]$ en dus kunnen we onze aandacht beperken tot dit interval.

Om het iteratieve proces te begrijpen, gebruiken we een grafische methode. We tekenen in een plaatje de grafieken $y = f(x)$ en $y = x$ en beginnen met het punt $(x_0, 0)$ op de x-as.

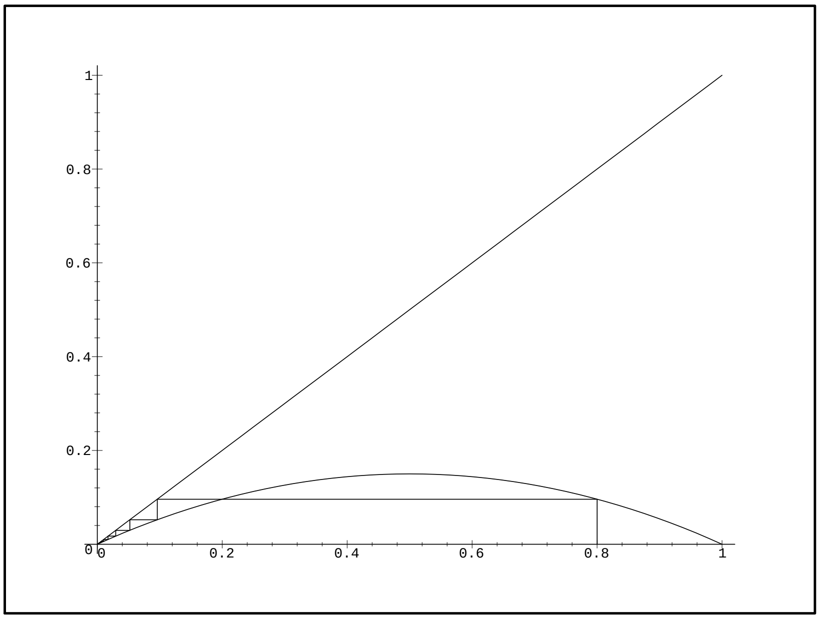

Fig. 1. $x_0 = 0.8$ en $a = 0.6$.

Lopen we nu recht omhoog vanuit dit punt, dan snijden we de grafiek van f in het punt (x_0, x_1), want $x_1 = f(x_0)$. Vanuit dit punt gaan we horizontaal naar de lijn $x = y$ om uit te komen in het punt (x_1, x_1). Van daaruit lopen we weer omhoog of omlaag naar de grafiek van f, naar het punt (x_1, x_2). Dan weer opzij naar $x = y$, omhoog of omlaag naar de grafiek van f, enzovoort. De tussenstops op de diagonaal $x = y$ bij dit proces zijn de punten (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3),.... . In Figuur 1 zie je het resultaat van deze wandeling door het (x, y)-vlak als $x_0 = 0.8$ en $a = 0.6$.
In dit geval zien we dat de punten (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3),.... steeds dichter bij de oorsprong $(0, 0)$ komen te liggen. Anders gezegd, $x_n \downarrow 0$ als $n \uparrow \infty$. Kennelijk is $x = 0$

een stabiel evenwicht voor het proces. Een evenwicht is een oplossing van de vergelijking $f(x) = x$. Zo'n oplossing noemen we een dekpunt van f. Met een dekpunt als startwaarde geeft de iteratie een rij waarvan alle rijelementen gelijk zijn aan de startwaarde.
Voor elke $0 < a < 1$ en elke startwaarde $0 < x_0 < 1$ ziet het bovenstaande plaatje er min of meer hetzelfde uit. Steeds vinden we dat $x_n \downarrow 0$ als $n \uparrow \infty$. We zeggen dat x_n monotoon dalend convergeert naar 0 als $n \uparrow \infty$.

Als a groter wordt dan 1 verandert het gedrag. In Fig. 2 hebben we $a = 1.5$ genomen en $x_0 = 0.8$.

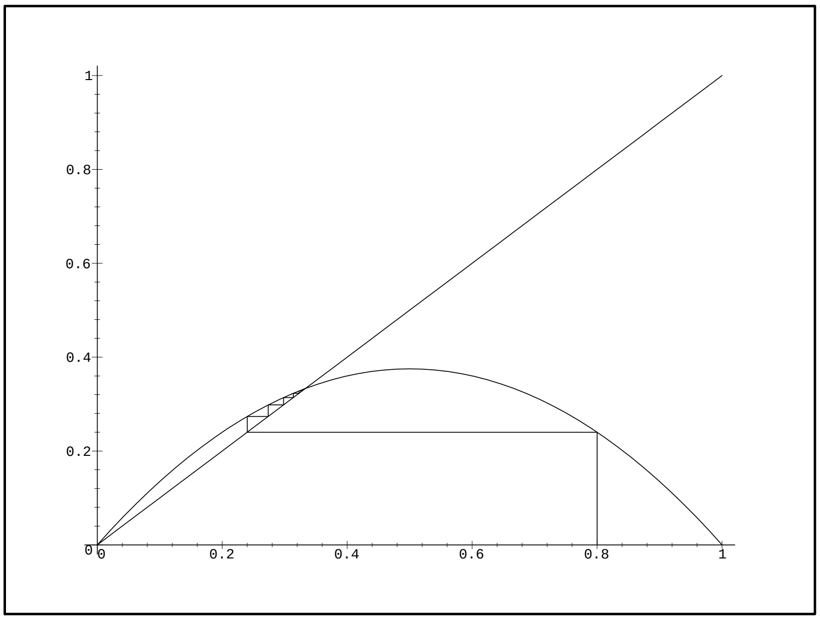

Fig. 2. $x_0 = 0.8$ en $a = 1.5$.

In het interval $[0, 1]$ is er nu een tweede dekpunt, nl. $x = \frac{a-1}{a}$, dat de rol van $x = 0$ overneemt. Wandelen we volgens hetzelfde procedee als hierboven door het (x, y)-vlak dan zien we de dat de punten steeds dichter bij $(\frac{a-1}{a}, \frac{a-1}{a})$ komen te liggen. Anders gezegd, het dekpunt $x = \frac{a-1}{a}$ is nu een stabiel evenwicht. Het evenwicht $x = 0$ is niet langer stabiel. Hoe dicht we ook bij 0 starten met x_0, de rij x_1, x_2, x_3,.... loopt weg van $x = 0$ en $x_n \uparrow \frac{a-1}{a}$ als $n \uparrow \infty$.
Bij $a = 2$ valt het stabiele dekpunt samen met het maximum van f. Als we de getallen x_n decimaal ontwikkelen zien we dat x_n nu veel sneller naar zijn limietwaarde gaat. Het aantal nullen van het verschil tussen x_n en $\frac{1}{2}$ wordt al snel elke stap twee keer zo groot.
Nemen we a groter dan 2, bijvoorbeeld $a = 2.8$ in Fig. 3, dan zien we nog steeds dat $x = \frac{a-1}{a}$ een stabiel evenwicht is, maar het procedee geeft nu een wandeling die in het (x, y)-vlak om het punt $(\frac{a-1}{a}, \frac{a-1}{a})$ naar binnen spriraliseert: $x_n \to \frac{a-1}{a}$ maar de convergentie is niet langer monotoon, x_n blijft heen en weer springen tussen waarden groter en kleiner dan $\frac{a-1}{a}$.

Dit gedrag blijft zo zolang $2 < a < 3$ maar als a groter wordt dan 3 verandert er iets: $x = \frac{a-1}{a}$ is niet langer stabiel. In Fig. 4 is $a = 3.3$ genomen. We zien dat de x_n met n even convergeren naar een limietwaarde en dat de x_n met n oneven naar een andere limietwaarde convergeren. Anders gezegd, de rij wordt uiteindelijk periodiek met periode 2. Beide limietpunten zijn stabiele evenwichten als we in plaats van f de afbeelding $f_2 : x \to f(f(x))$ itereren.

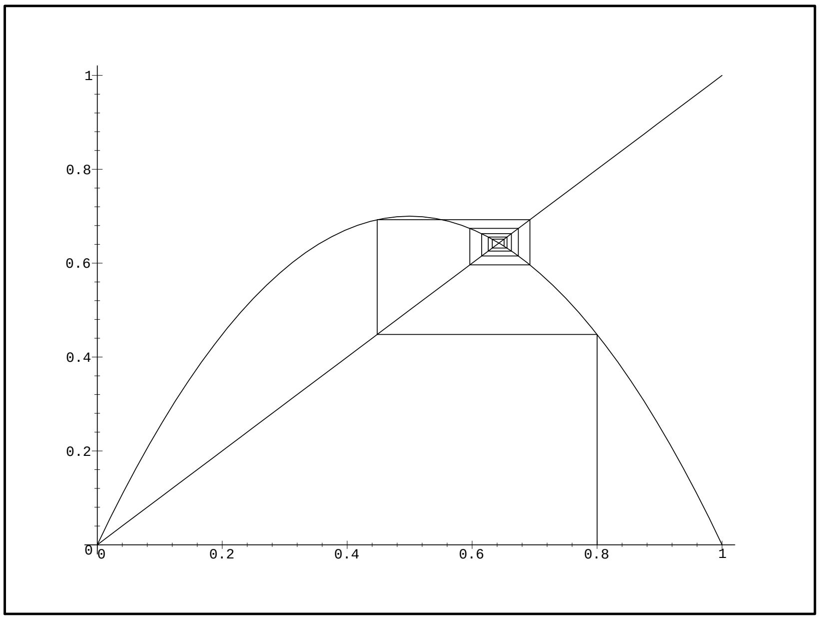

Fig. 3. $x_0 = 0.8$ en $a = 2.8$.

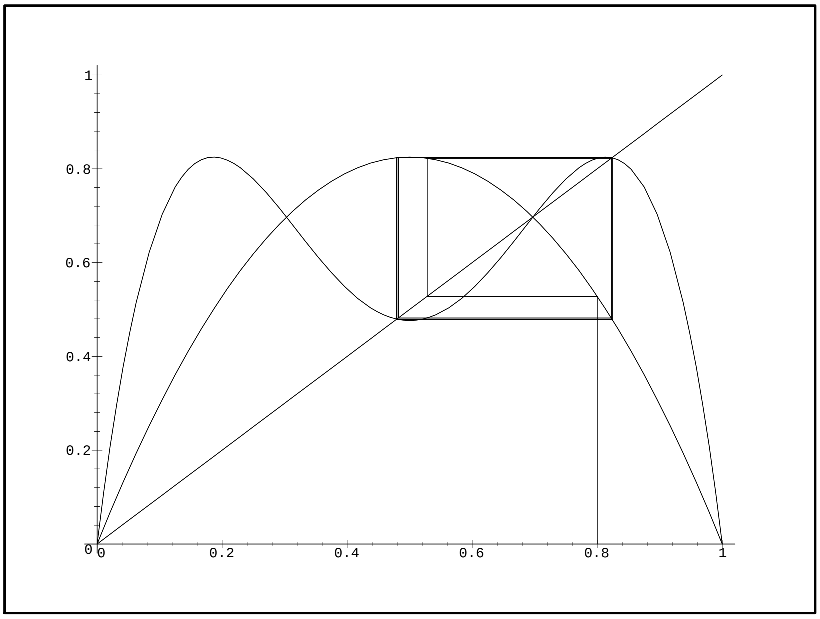

Fig. 4. $x_0 = 0.8$ en $a = 3.3$, de nieuwe grafiek is die van f_2

Als we a groter maken zien we dat bij $a = 1 + \sqrt{6}$ de twee stabiele evenwichten van f_2 op hun beurt hun stabiliteit verliezen en dat er vier stabiele evenwichten van de afbeelding $f_4 : x \to f(f(f(f(x))))$ ontstaan. De rij wordt nu uiteindelijk periodiek met periode 4.

Bij het verder verhogen van a zien we dat er een ware doos van Pandora opengaat. Dit kunnen we in één plaatje al zien. In Fig. 5 zetten we horizontaal a uit en vertikaal voor elke a een aantal iteraties x_n bij gegeven startwaarde, waarbij we alleen grote waarden van n nemen. Dus als we een a hebben waarvoor de rij zich uiteindelijk regelmatig gedraagt, dan zien we dat in dit plaatje. Tussen $a = 1$ en $a = 3$ zien we bijvoorbeeld één kromme die overeenkomt met het stabiele dekpunt $x = \frac{a-1}{a}$. Bij $a = 3$ splitst deze op in twee stukken die overeenkomen met twee stabiele dekpunten van f_2. Deze twee stukken splitsen bij $a = 1 + \sqrt{6}$ op in vier stukken. Even verder gaan we van 4 naar 8, van 8 naar 16, enzovoort. Deze cascade van verdubbelingen zien we gebeuren in een begrensd a-interval. Als we de a-waarde waarvoor we van periode 2^{n-1} naar periode 2^n gaan a_n noemen, dan blijkt dat $a_n \uparrow 3.569946...$ Voor a groter dan deze waarde is het minder duidelijk wat er gebeurt maar voor dat we daar naar kijken willen we eerst zien wat we kunnen begrijpen van wat we tot nu toe gezien hebben.

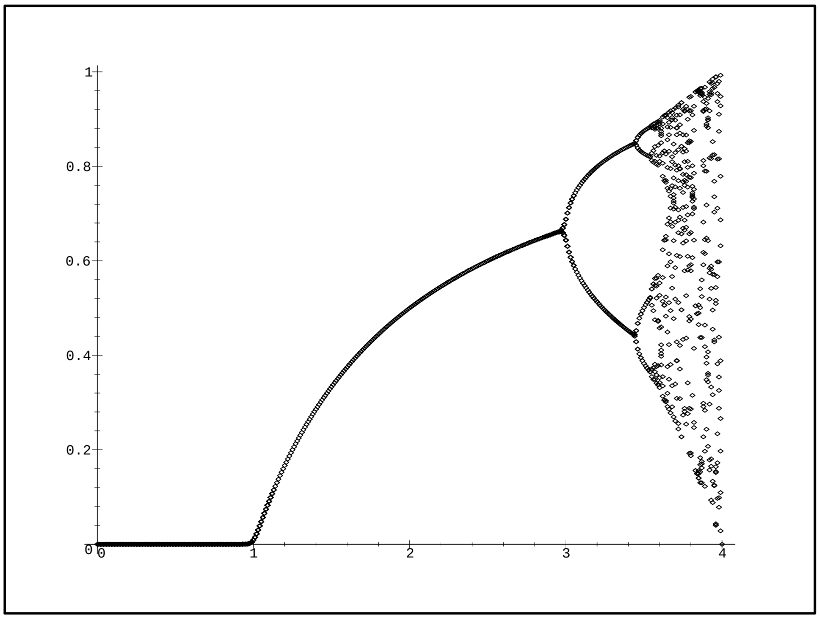

Fig. 5. Het bifurcatieplaatje, $0 \leq a \leq 4$.

Stabiele dekpunten. We hebben gezien dat voor $0 < a < 3$ de rij x_n voor elke beginwaarde x_0 in het interval $(0, 1)$ stabiliseert naar een evenwicht. Voor $a > 3$ hebben we echter periodiek gedrag gezien. In de volgende definities maken we dit wat preciezer.

DEFINITIE 1. Laat I een interval zijn en $f : I \to I$ een afbeelding.
(i). Een punt $\overline{x}$ in I heet een evenwicht of dekpunt voor de afbeelding f als $f(x) = x$. Een evenwicht $\overline{x}$ heet asymptotisch stabiel als er een open interval J bestaat dat $\overline{x}$ bevat zó dat voor elke x_0 in $I \cap J$ de rij $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $x_4 = f(x_3)$,... de eigenschap heeft dat $x_n \to \overline{x}$ voor $n \to \infty$.

(ii). Laat $n > 1$ een geheel getal zijn. Een punt $\overline{x}$ in I heet een periodiek punt met periode n als $\overline{x}$ een evenwicht is van f_n maar niet van f_1, f_2, ... en f_{n-1}. Hierbij gebruiken we de notatie $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f_1(x))$, $f_3(x) = f(f_2(x))$, $f_4(x) = f(f_3(x))$, enzovoort. Het punt $\overline{x}$ met periode n heet asymptotisch stabiel als x een asymptotisch stabiel evenwicht is van f_n.

In het vervolg bedoelen we met stabiel asymptotisch stabiel. Met behulp van de grafische methode kunnen we goed zien of een evenwicht $\overline{x}$ van f stabiel is. Dit heeft alleen maar te maken heeft met het gedrag van f in de buurt van het evenwicht. Als we in het plaatje met de grafiek van f and de diagonaal $y = x$ inzoomen op het punt $(\overline{x}, \overline{x})$, dan gaat de grafiek van f steeds meer op een rechte lijn lijken met richtingscoefficiënt $b = f'(\overline{x})$. Enig proberen met de grafische methode leidt tot het inzicht dat $\overline{x}$ stabiel is als $|b| < 1$ en onstabiel als $|b| > 1$.

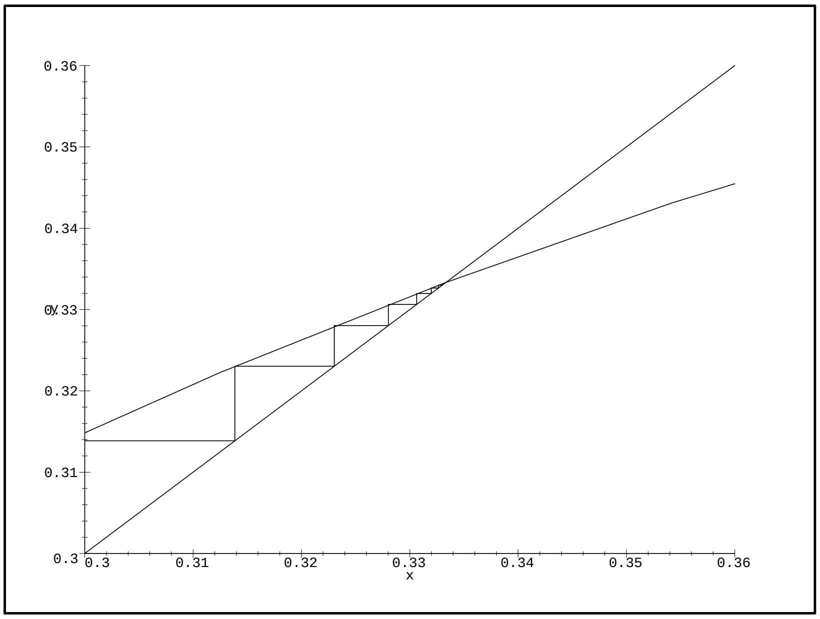

Fig. 6. $a = 1.5$, ingezoomed.

Dit kunnen we formuleren als

STELLING 1. Laat I een interval zijn en $f : I \to I$ een continu differentieerbare afbeelding. Als $\overline{x}$ een dekpunt is van f en $|f'(\overline{x})| < 1$, dan is $\overline{x}$ een stabiel evenwicht. Als $|f'(\overline{x})| > 1$, dan is $\overline{x}$ geen stabiel evenwicht.

We zullen deze stelling niet bewijzen. In het bewijs speelt een andere stelling, die bekend staat als de Banach Contractie Stelling, een grote rol. Deze zegt dat als een afbeelding f van een gesloten begrensd interval naar zich zelf de eigenschap heeft dat $|f(x) - f(y)| < c|x - y|$ voor een vaste $0 < c < 1$ en alle x en y in I, dat dan die afbeelding precies één stabiel dekpunt heeft.
We kunnen ook iets zeggen over hoe het aantal evenwichten kan veranderen als we a variëren. De volgende stelling zegt dat dit aantal alleen maar kan veranderen als de grafiek van f en de diagonaal $y = x$ elkaar raken.

STELLING 2. Laat $I = [0,1]$ en $f : I \to I$ een continu differentieerbare afbeelding. Als er voor een vaste waarde van a geen dekpunten $\overline{x}$ zijn met $f'(\overline{x}) = 1$, dan is het aantal dekpunten van f constant in een open interval dat a bevat.

Met Stelling 1 en 2 kunnen we al een gedeelte van het vertakkingsplaatje begrijpen. De waarden van a waarvoor er wat verandert, zijn precies die waarden van a waarvoor een f_n ($n = 1, 2, 4, 8, \ldots$ als a oploopt naar 3.569946..) een dekpunt $\overline{x}$ heeft met $f_n'(\overline{x}) = 1$ of $f_n'(\overline{x}) = -1$. We bekijken dit voor een aantal waarden van a.

Wat gebeurt er bij $a = 1$? We zien dat 0 nog steeds een stabiel evenwicht is, maar dat voor a iets groter dan 1 er twee evenwichten zijn, namelijk 0 zelf, die nu onstabiel is, en $\frac{a-1}{a}$, die wel stabiel is. For a iets kleiner dan 1 zijn er ook twee evenwichten, alleen is 0 dan stabiel en $\frac{a-1}{a}$ onstabiel. Als a door 1 heen gaat komen de twee evenwichten bij elkaar en wisselen hun stabiliteit uit.

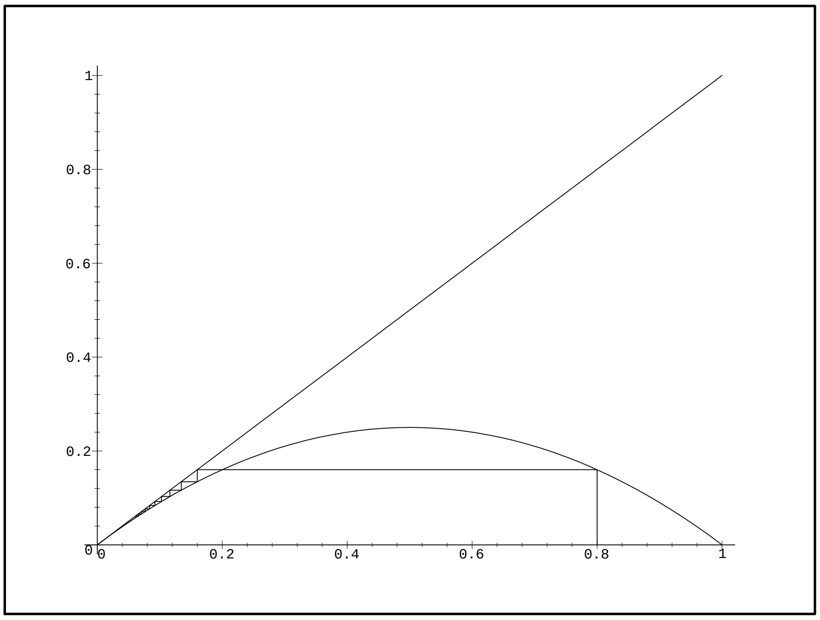

Fig. 7. $a = 1$.

Wat gebeurt er bij $a = 3$? We zien dat $\frac{a-1}{a}$ nog steeds een stabiel evenwicht is en dat het aantal evenwichten niet verandert als we a wat groter maken. Wat er wel verandert is dat $f'(\frac{a-1}{a}) = 2 - a$ kleiner wordt dan -1 en dat $\frac{a-1}{a}$ daarmee als evenwicht van f onstabiel wordt. Merk nu echter op dat (kettingregel!) $f_2'(\frac{a-1}{a}) = (f'(\frac{a-1}{a}))^2 = (2-a)^2$ door 1 heen gaat als a door 3 heen gaat. Het aantal evenwichten van f_2 verandert nu wel: er komen twee stabiele evenwichten bij en het oude evenwicht wordt onstabiel. De twee nieuwe stabiele evenwichten van f_2 zijn periodieke punten met periode 2 die onder f op elkaar worden afgebeeld. Deze vertakking (bifurcatie, de overgang van Fig. 3 naar Fig. 4) wordt periodeverdubbeling genoemd.

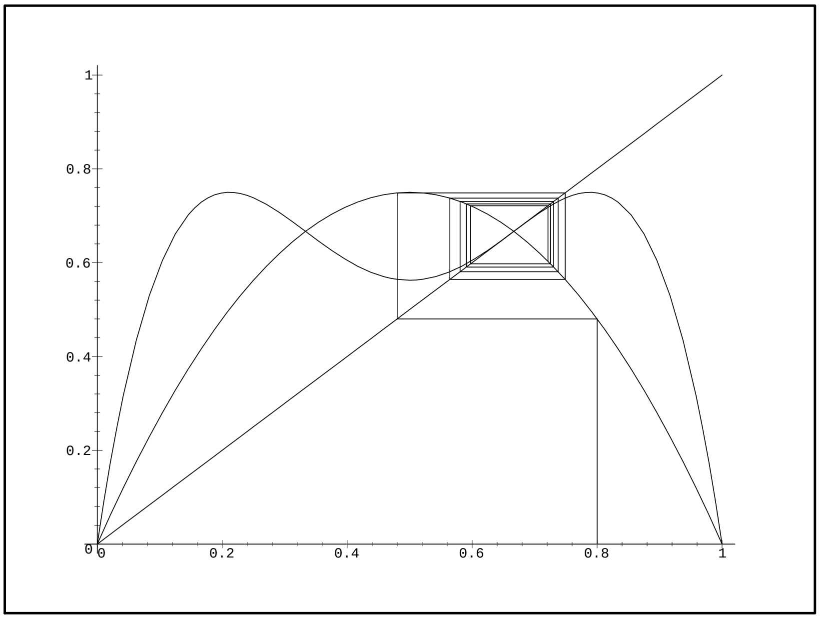

Fig. 8. $a = 3$ met $y = f_2(x)$.

Wat gebeurt er bij $a = 1 + \sqrt{6}$? Bij deze a gebeurt hetzelfde met f_2 als bij $a = 3$ met f. Deze a is te vinden door x en a op te lossen uit de twee vergelijkingen $f_2(x) = x$ en $f_2'(x) = -1$ (in deze beide vergelijkingen komt a voor).

Conclusie. In principe kunnen we de a-waarden waarvoor een periodeverdubbeling optreedt vinden door de vergelijkingen $f_k(x) = x$ en $f_k'(x) = -1$ op te lossen voor x en a met $k = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. Helaas worden deze vergelijkingen steeds moeilijker exact oplosbaar en moeten we onze toevlucht nemen tot numerieke methoden. De zo gevonden a_n blijken een bijzondere eigenschap te hebben:

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \to F = 4.6692016.. \text{ als } n \to \infty.$$

Het getal F wordt de Feigenbaum constante genoemd. Ook bij andere keuzes van f, bijvoorbeeld bij $f(x) = a\sin(\pi x)$ komen periodeverdubbelingen met een door het getal F beschreven regelmaat. Kennelijk is F een universele constante, net zoals het getal π.

Voorbij $a = 3.569946..$, periode 3 en chaos. Bij deze waarde hebben we alle periodeverdubbelingen van 1 naar 2 naar 4 naar 8 etc. achter de rug en lijkt regelmaat ver te zoeken. Als we echter goed kijken zien we in het bifurcatieplaatje toch weer stukjes die lijken op wat we voor $a < 3.569946..$ gezien hebben. Periodieke punten met periode 3 spelen hierbij een belangrijke rol. Hoe vinden we die punten?
Voor kleine a heeft f_3 dezelfde dekpunten als f. Als er door a te verhogen dekpunten van f_3 bijkomen dan betekent dat dat de grafiek van f_3 de diagonaal $y = x$ voor een nog te bepalen waarde van a eerst raakt, waarna bij verder verhogen van a het raakpunt opsplitst in twee snijpunten. Deze waarde van a kunnen we weer vinden door de vergelijkingen

$f_3(x) = x$ en $f_3'(x) = 1$ op te lossen voor a en x. Met behulp van het computer-algebra pakket Maple lukt dit. We vinden dat de (drie) periodieke punten met periode 3 ontstaan bij $a = 1 + \sqrt{8} = 3.828427....$ Door $f_3(x) = x$ en $f_3'(x) = -1$ op te lossen vinden we ook weer dat voor $a = 3.828427124...$ (een wortel van $a^6 - 6a^5 + 4a^4 + 24a^3 - 14a^2 - 36a - 81$) er een periodeverdubbeling is van 3 naar 6. En daarna weer van 6 naar 12 naar 24 enzovoort, en ook hier komt weer de Feigenbaum constante F te voorschijn. Overigens blijven de periodieke punten met periode 3 hierbij wel bestaan, ze zijn alleen niet langer stabiel. Dit volgt uit Stelling 2.

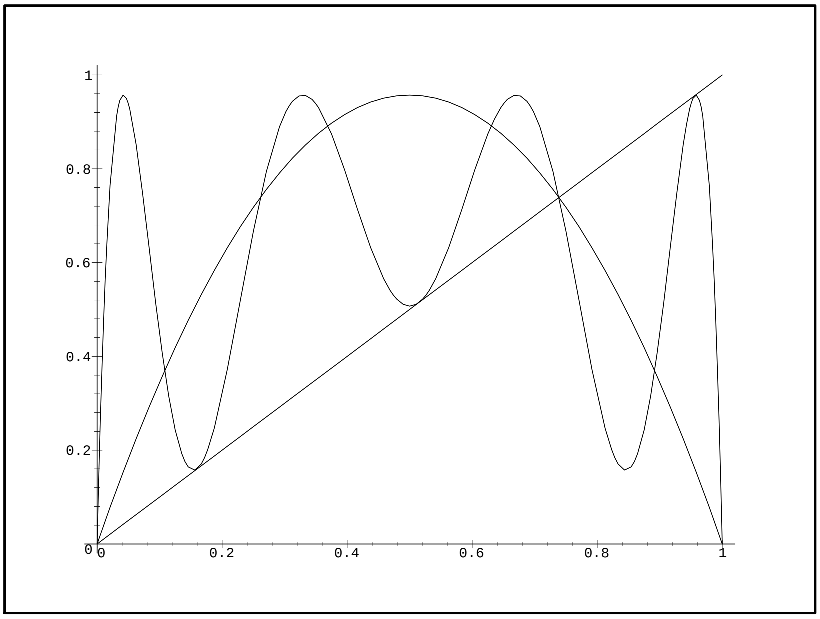

Fig. 9. $a = 1 + \sqrt{8}$ en $f_3(x)$.

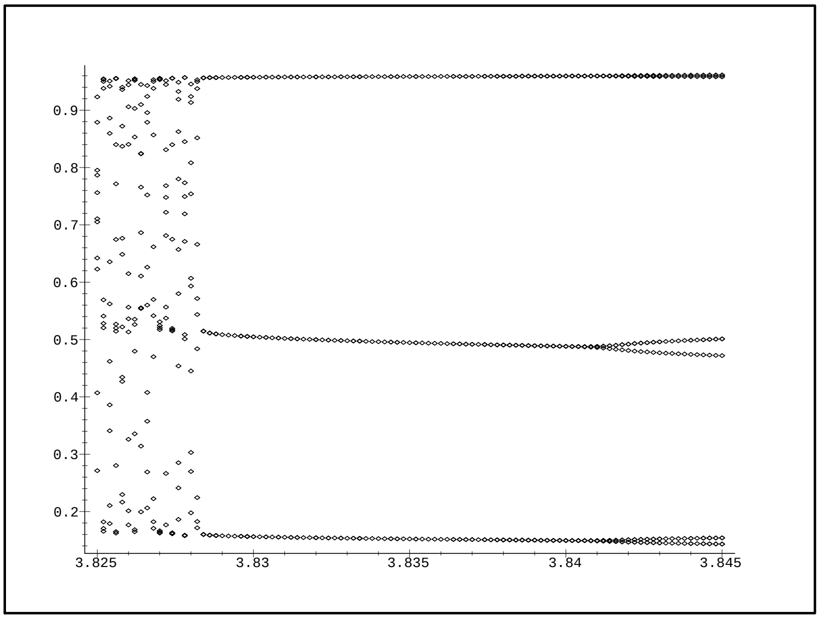

Fig. 10. Ontstaan van periode 3 en 6.

Ook de andere periodes kunnen we in principe zo vinden, met steeds weer dezelfde cascade van periodeverdubbelingen. Er is echter iets bijzonders met periode 3.

STELLING 3. Als I een interval is en $f : I \to I$ een continue afbeelding met een periodiek punt van periode 3, dan heeft f periodieke punten van elke periode.

Deze stelling is voor het eerst geformuleerd en bewezen in de Sovjet-Unie door Sarkovskii in 1964. Later is de stelling herontdekt door de Amerikanen Li en Yorke (1975) en gepubliceerd in een artikel met de titel "Period three implies chaos". Het bewijs van Stelling 3 is gebaseerd op een paar eenvoudige maar fundamentele eigenschappen van continue functies in de reële getallen. We formuleren deze eigenschappen die intuitief wellicht duidelijk zijn hier zonder bewijs.

Eigenschap 1. Het beeld $f(J) = \{f(x) : x \in J\}$ van een interval $J \subset I$ is weer een interval.

Eigenschap 2. Als $J \subset I$ een interval is en het beeld $f(J)$ omvat J, dan heeft f een dekpunt in J.

Eigenschap 3. Als het beeld $f(J_0)$ van een interval $J_0 \subset I$ een interval J_1 bevat dan is er een interval $J \subset J_0$ zodat $f(J) = J_1$ (een deelinterval van het beeld van een interval is het beeld van een deelinterval).

Bewijs van Stelling 3. Als $f : I \to I$ een periodiek punt heeft met periode 3, dan zijn er dus punten p_1, p_2, p_3, zó dat $p_2 = f(p_1)$, $p_3 = f(p_2)$ en $p_1 = f(p_2)$. We nemen in dit bewijs aan dat $p_1 < p_2 < p_3$ en bewijzen dat f een periodiek punt heeft met periode 4. Als je het bewijs begrijpt, dan kun je de rest van het bewijs waarschijnlijk zelf geven.
In het bewijs gaan we uit van de intervallen $I_1 = [p_1, p_2]$ en $I_2 = [p_2, p_3]$. Uit de aanname dat $p_1 = f(p_3) < p_2 = f(p_1) < p_3 = f(p_2)$ en eigenschap 1 volgt dat $f(I_1)$ het interval I_2

omvat en $f(I_2)$ het interval $I_1 \cup I_2$. We kunnen dus de volgende keten opschrijven:

$$I_2 \to f(I_2) \supset I_2 \to f(I_2) \supset I_2 \to f(I_2) \supset I_1 \to f(I_1) \supset I_2.$$

Passen we nu herhaald eigenschap 3 toe, dan is er dus een interval $J \subset I_2$ zó dat $f(J) \subset I_2$, $f_2(J) = f(f(J)) \subset I_2$, $f_3(J) = f(f(f(J))) \subset I_1$ en $f_4(J) = f(f(f(f(J)))) = I_2$.
Uit eigenschap 2 volgt nu dat f_4 een dekpunt $\overline{x}$ in J (en dus in I_2) heeft. Dit punt is dus een periodiek punt van f van periode hoogstens 4 of een dekpunt van f. Als $\overline{x}$ geen periodiek punt van periode 4 is, dan moet een van de punten $f(\overline{x}) \in I_2$, $f_2(\overline{x}) \in I_2$, $f_3(\overline{x}) \in I_1$ al gelijk zijn aan $\overline{x}$. We gaan nu na dat geen van deze gevallen mogelijk is.
Stel $f(\overline{x}) = \overline{x}$, dan is $f_3(\overline{x}) = f_2(\overline{x}) = f(\overline{x}) = \overline{x} \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ waaruit zou volgen dat $\overline{x} = p_2$, in tegenspraak met $f(p_2) = p_3 \neq p_2$.
Stel $f_2(\overline{x}) = \overline{x}$, dan is $f_3(\overline{x}) = f(\overline{x}) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, waaruit zou volgen dat $\overline{x} = f(f_3(\overline{x})) = f(p_2) = p_3$ en dus $f(\overline{x}) = f(p_3) = p_1 \notin I_2$, wederom een tegenspraak.
Tenslotte is ook $f_3(\overline{x}) = \overline{x}$ onmogelijk, want anders zou $f_3(\overline{x}) = \overline{x} = f_4(\overline{x}) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, ook weer in tegenspraak met $f_4(p_2) = p_3 \neq p_2$.
Hiermee is het bewijs van Stelling 3 voor periode 4 compleet.

Uit Stelling 3 volgt dat het gedrag van een met het itereren van f gemaakte rij gevoelig is voor kleine variaties in de startwaarde. Voor de afbeelding $f(x) = ax(1-x)$ met $0 \leq a \leq 4$ en $x \in [0,1]$ kan bewezen worden dat de kans hierop, afhankelijk van a, 0 of 1 is. In het laatste geval spreken we van chaotisch gedrag. Elke verstoring van de beginwaarde, hoe klein dan ook, leidt op den duur tot ander gedrag van de rij. De afbeelding definieert zo in feite een loterij en kan gebruikt worden om zogenaamde toevalsgetallen te genereren.

Het merendeel van wat we hierboven behandeld hebben is terug te vinden in het door H.W. Broer en F. Verhulst samengestelde boek "Dynamische systemen en chaos" (Epsilon Uitgaven, Utrecht), en met name in het door S.J. van Strien geschreven derde hoofdstuk.

J. Hulshof, 1998.