

Joost Hulshof

Divisie Wiskunde en informatica

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit

De boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam

jhulshof@few.vu.nl

Inaugurele rede

Veranderingen

De theorie van differentiaalvergelijkingen is een eeuwenoud onderzoeksgebied, dat de laatste decennia een grote verandering heeft doorgemaakt. Klassiek vinden differentiaalvergelijkingen hun oorsprong in de fysica: zodra een proces waar sprake is van verandering in de tijd wordt gemodelleerd, komt men tot een dergelijke vergelijking. Aanvankelijk heeft men vooral exacte oplossingen voor speciale vergelijkingen gezocht, maar spoedig werd duidelijk dat dergelijke oplossingen vaak niet te vinden zijn. Vanaf het begin van de vorige eeuw werden kwantitatieve theorieën ontwikkeld, die dikwijls gebaseerd waren op een lokale lineaire benadering van het probleem. Tegelijkertijd kwamen er steeds meer fundamenteel verschillende niet-lineaire differentiaalvergelijkingen vanuit diverse deelgebieden in de fysica, zoals het beroemde drie lichamenprobleem. Voor dit soort vergelijkingen schoot een dergelijke benadering volledig tekort. Onder andere door het werk van Poincaré is de studie naar niet-lineaire differentiaalvergelijkingen breed uitgewaaierd naar andere wiskundige disciplines zoals de meetkunde, algebra en topologie. In de zestiger jaren zijn overal in de wereld onderzoeksgroepen voor niet-lineaire analyse ontstaan; in Nederland onder andere rond Bert Peletier in Leiden. Joost Hulshof is een van zijn promovendi. Nu aanvaardt hij het ambt van hoogleraar aan de Vrije Universiteit Amsterdam op 16 september 2005 met het uitspreken van onderstaande rede.

Maak je nou de hele dag *sommen*? Of *verzin* je sommen, die je daarna weer aan anderen geeft om te maken? Vragen die je als wiskundige nogal eens krijgt. Op school maakte je bij wiskunde immers de ene som na de andere, en de uitblinkers gingen vaak wiskunde studeren.

Inderdaad, ik verzin sommen en ik maak sommen. Niet zomaar sommen, maar sommen die te maken hebben met *veranderingen*, veranderingen in de wereld om ons heen. Beter gezegd, met wiskundige modellen voor

verschijnselen in die wereld. Modellen die bestaan uit *differentiaalvergelijkingen*. Voor bijvoorbeeld een trillende snaar, een standaard-som in het college *partiële* differentiaalvergelijkingen. Met als bijproduct $\frac{\pi^2}{6}$ als oneindige som van de omgekeerde kwadraten

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$$

Een wonderlijke formule die allerlei theoretische vragen oproept. U ziet: zuivere en toegepaste wiskunde gaan hand in hand.

Dimensies

Soms hebben veranderingen te maken met het streven van een systeem om een *minimum* te bereiken. U kunt denken aan een balletje dat, rollend over een landschap, een laagste punt zoekt. In een versimpelde wiskundige beschrijving heeft het balletje op elk tijdstip vier coördinaten, twee voor de positie en twee voor de snelheid. Die coördinaten veranderen in de tijd. Het rollende balletje is zo een voorbeeld van een *eindig*-dimensionaal dynamisch systeem, waarbij *punten* zich door een in dit geval 4-dimensionale ruimte bewegen.

Bij een *zeepbel* ligt dit anders. De *vorm* van een zeepbel kan niet worden vastgelegd door maar eindig veel coördinaten. Om te beschrijven hoe die vorm verandert, moeten we de stap maken van eindig naar *oneindig*-dimensionaal. Die stap is enorm, *ook* voor wiskundigen. Laat ik dat proberen uit te leggen.

Onze dagelijkse perceptie van de werkelijkheid is die van de 3-dimensionale ruimte om ons heen, zoals beschreven door *Euclides*. Snijden we die ruimte in twee stukken, dan is het *snijvlak* een voorbeeld van een 2-dimensionale ruimte. Snijden we een *vlak* in twee stukken, dan is de *snijlijn* een voorbeeld



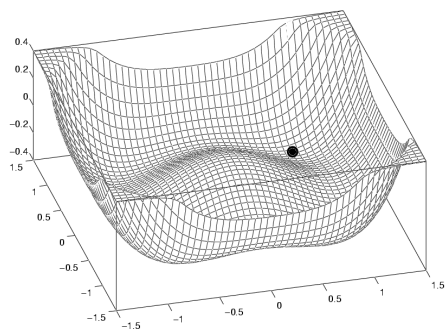
Christiaan Krouwels

Joost Hulshof

van een 1-dimensionale ruimte. Zo tellen we van 3 naar 2 naar 1.

Tel ik de *andere kant* op, dan gaat het na 3 gewoon verder. Een wiskundige ziet een *lijnstuk*, een *vierkant*, en een *kubus*, als de eerste drie leden van een *familie* van objecten, genummerd door hun dimensie. Net zoals methanol, ethanol en propanol, de eerste drie alcoholmoleculen zijn, genummerd door het aantal koolstofatomen in het molecuul. Alleen ethanol staat hiernaast in proefopstellingen klaar.

Na 3 komt 4, na propanol komt butanol, en na de 3-dimensionale kubus komt de 4-dimensionale kubus. Het is aardig om te laten zien hoe je je stap voor stap een voorstelling



Het bepalen van een minimum: een balletje in een heuvel-landschap zoekt het laagste punt.

kunt maken van kubussen in hogere dimensies.

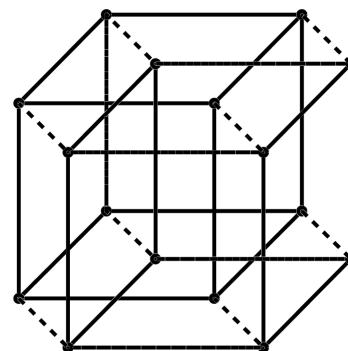
Ik begin met een lijnstuk. Uit twee lijnstukken ontstaat een plaatje van het vierkant door de overeenkomstige hoekpunten te verbinden. Op dezelfde manier maak ik met twee vierkanten een plaatje van een kubus, en met twee kubussen een plaatje van een 4-dimensionale kubus. Van 1 naar 2, van 2 naar 3, van 3 naar 4, elke volgende stap is in feite *hetzelfde*.

Punten in eindigdimensionale ruimten worden vastgelegd door hun *coördinaten*. In het vlak genereert een *vierkant* op natuurlijke manier een *rooster*, en daarmee een coördinatensysteem. Elk *punt in het vlak* heeft twee coördinaten, de eerste voor de horizontale richting, de tweede voor de verticale richting. Beide coördinaten zijn nul in de oorsprong.

Met deze coördinaten kunnen we in het vlak *wiskunde* bedrijven. De *optelling* en de *scalaire* vermenigvuldiging maken van het vlak een 2-dimensionale *vectorruimte*. Daarbij zien we een punt ook als een *pijl*, een vector. De *norm* van een punt is zijn afstand tot de oorsprong, de *lengte* van het pijltje dus. Met Pythagoras is de vergelijking voor een cirkel met straal 5 en middelpunt in

de oorsprong, gegeven door $x^2 + y^2 = 5^2$. Evenzo genereert een *vier-dimensionale kubus* een rooster in de *vier-dimensionale* ruimte, waarin punten *vier* coördinaten hebben, zeg x_1, x_2, x_3, x_4 . Alle punten met afstand 5 tot de oorsprong worden gegeven door de vergelijking $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 5^2$.

Eindigdimensionale dynamische systemen komen in overvloed voor als *wiskundige modellen*. Zo kan een reactie in een homogeen mengsel worden beschreven met een *bewegend punt*: de coördinaten van het punt zijn dan de concentraties van de reagerende stoffen.



Gedachtenexperiment: construeer een vierdimensionale kubus door vanuit elk hoekpunt van een driedimensionale kubus een extra ribbe te trekken naar een tweede driedimensionale kubus.

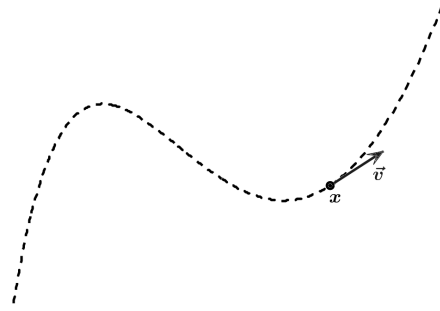
De dimensie van de *ruimte* waardoor het punt zich beweegt is gelijk aan het *aantal* stoffjes in de reactie. Uit de reactiekinetiek volgt een *bewegingsvergelijking*. Die zegt hoe de positie $\mathbf{x}$ de snelheidsvector $\mathbf{v}$ vastlegt. Ik kom daar straks nog op terug. Deze bewegingsvergelijking nu bepaalt hoe punten zich bewegen. De positie bepaalt de snelheid, en de snelheid bepaalt weer hoe de positie verandert. Dit is wat we een eindig-dimensionaal dynamisch systeem noemen.

In het 4-dimensionale systeem voor het rollende balletje zijn het de krachten die op het balletje werken, die bepalen hoe de vier coördinaten veranderen. Omdat door *wrijving* energie verloren gaat komt het balletje, als het tenminste niet uit ons gezichtsveld verdwijnt, uiteindelijk tot *rust* in een laagste punt.

Deze uitspraak is een *voorbeeld* van een antwoord op een vraag die bij elk dynamisch systeem gesteld wordt. Convergeert een punt, waarvan de baan begrensd is, naar een evenwicht? En zo nee, wat doet het dan wel?

Bij de Lorenzvergelijkingen, een dynamisch systeem in dimensie 3, afgeleid als een *uiteraard* onbetrouwbaar wiskundig model voor de verandering van het weer, kunnen banen er uitzien zoals in dit plaatje. De baan springt op een *onvoorspelbare* manier heen en weer tussen de linker- en de rechtervleugel van de vlinderfiguur. Een mooi voorbeeld dat een *slecht* wiskundig model toch zijn nut kan hebben: de ontdekking, dat simpele goedgestelde deterministische modellen zo'n onverwacht chaotisch gedrag kunnen genereren, heeft tot vele nieuwe inzichten geleid.

Met goedgesteldheid bedoel ik dat, gegeven de begintoestand, de door het punt doorlopen baan uniek bepaald wordt door de bewegingsvergelijking. Bij eindigdimensionale



Een baan van een deeltje in een vectorveld. Een bewegingsvergelijking koppelt aan een positie $\mathbf{x}$ een snelheidsvector $\mathbf{v}$.

systeem is dat, onder milde voorwaarden, *altijd* het geval, zowel voor- als achterwaarts in de tijd. Het *enige* dat er mis kan gaan is dat het punt in eindige tijd uit het zicht verdwijnt.

Ooneindige dimensies

Het *verschil* tussen eindig- en oneindig-dimensionaal wil ik illustreren met een wiskundige *stelling* die iedere wiskunde student in zijn eerste jaar te zien krijgt. Ik introduceer die stelling vaak met het volgende verhaal.

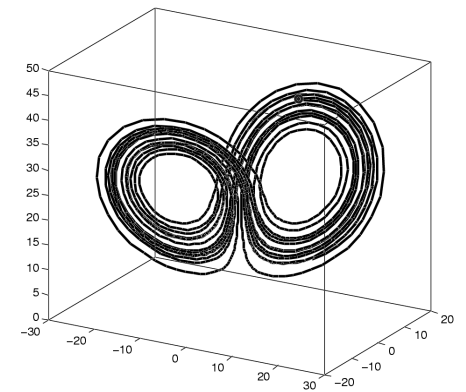
Stel dat ik de *waarde* van een of andere fysische grootheid wil meten. Als *gedachten-experiment* neem ik aan dat het gaat om een grootheid die ligt tussen 0 en 1, en dat ik bij elke *volgende* meting de meetnauwkeurigheid kan opvoeren, met tenminste één cijfer extra achter de komma bijvoorbeeld. Als de te meten grootheid *inderdaad* een constante is verwacht ik een *willekeurig* goede benadering, als ik de meting maar vaak genoeg herhaal.

Wat er in dit natuurlijk niet echt uitvoerbare experiment *mis* kan gaan is dat, net als bij echte practica, niet gebeurt wat je verwacht. Bijvoorbeeld omdat de te meten grootheid helemaal geen constante is. Met in het vooruitzicht een *deadline* voor het inleveren van een verslag, of erger, het publiceren van een ar-

tikel, lonkt de verleiding om door het *weglaten* van meetresultaten *toch* een waarde voor de grootheid te presenteren. Bezwijkend voor deze verleiding hoop ik, in mijn gedachten-experiment, zo een rij meetwaarden over te houden die wél steeds dichter bij een vaste waarde komen te liggen.

Als wiskundige vertel ik u dat dit altijd kan: de rij heeft een *deelrij* met de eigenschap dat de onderlinge verschillen vanaf de eerste meetwaarde hoogstens 1 zijn, vanaf de tweede hoogstens een *half*, vanaf de derde hoogstens een *kwart*, vanaf de vierde hoogstens een *achtste*, enzovoort, enzovoort. Het *bewijs* van deze bewering is gebaseerd op het herhaaldelijk in twee *stukken* hakken van het lijnstuk tussen 0 en 1.

Deze deelrij nu neem ik als rij van meetwaarden voor mijn verslag want ver genoeg in deze rij worden alle onderlinge verschillen zo klein als ik maar wil. Cauchy was er al van overtuigd dat een rij met deze eigenschap wel *moet* convergeren naar een limiet.

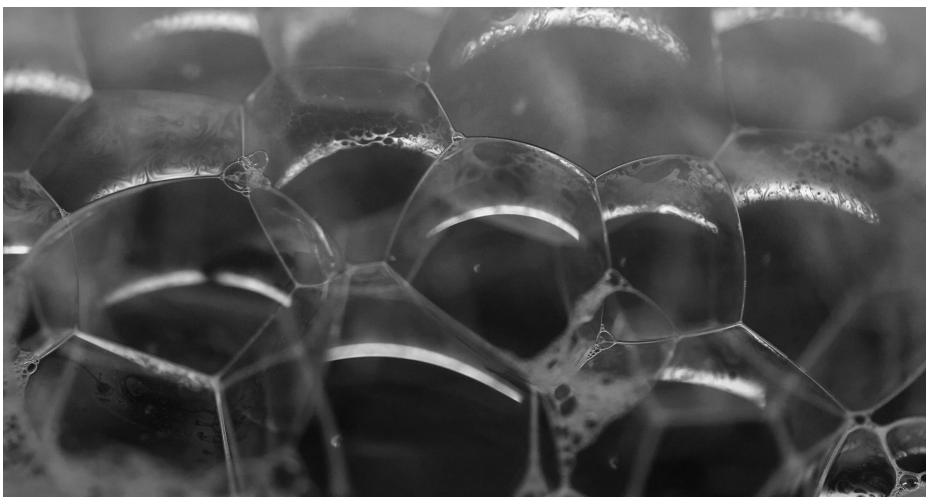


De baan van een oplossing van het Lorenzstelsel. De baan heeft links en rechts onregelmatige aantallen lussen.

Hij concludeerde dat het *bestaan* van de limiet verifieerbaar was *zonder* expliciete informatie over de limietwaarde. Tegenwoordig heten rijen met deze eigenschap Cauchyrijen, en is het een wiskundige *stelling* die zegt dat Cauchyrijen naar een unieke limiet convergeren.

Het woord limiet moet u hier niet in verband brengen met snelheidslimieten, of andere in het dagelijks leven aan ons gestelde beperkingen. De limiet waar ik het over heb, is niets anders dan de unieke waarde die door de rij willekeurig goed benaderd wordt, maar niet daadwerkelijk hoeft te worden aangenomen.

De uitspraak dat elke begrensde rij zo'n convergente deelrij heeft, staat bekend als de Stelling van Bolzano-Weierstrass. Deze stelling geldt niet alleen voor punten op een lijn, maar ook voor punten in het vlak, en in al-



De vorm van een zeepbel kan niet worden vastgelegd met eindig veel coördinaten.

foto: iStockphoto.com

le eindigdimensionale ruimten. Het bewijs is gebaseerd op het herhaaldelijk verdelen van een lijnstuk in 2 lijnstukken, een vierkant in 4 vierkanten, een kubus in 8 kubussen, etc.

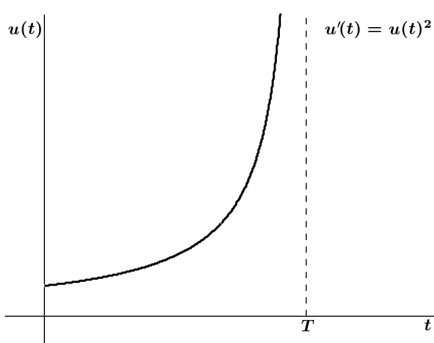
Deze stelling is de *hoeksteen* van de eindigdimensionale analyse. In de context van *dynamische systemen* volgt eruit dat begrensde banen *limietverzamelingen* hebben, zoals de vlinder bij de Lorenzvergelijkingen. Uit de stelling van Bolzano-Weierstrass volgt ook dat het eindig-dimensionaal niet uitmaakt welke norm je gebruikt. Als maar voldaan is aan drie basis axioma's: afstanden zijn positief, afstanden laten zich schalen, en omlopen is niet voordeliger. Eindig-dimensionaal zijn alle normen equivalent.

De Navier-Stokesvergelijking

Hoe anders is het bij *oneindigdimensionale* systemen. Ik noem in dit verband de Navier-Stokes vergelijkingen. Dit zijn de bewegingsvergelijkingen voor de stroming in een afgesloten volle bak water.

Gegeven een *beginsnelheidsveld* met eindige totale bewegingsenergie, zou je, met zogenaamde slipvrije randvoorwaarden aan de rand van de bak, verwachten dat voor alle tijd daarna het snelheidsveld *vast* ligt. De *vraag* of dit begin-randwaarde probleem voor de Navier-Stokes vergelijkingen in *deze* zin goed gesteld is, staat op de lijst van zeven *one million dollar millenniumproblems* van het Clay Instituut.

Om in de prijzen te vallen moet de vraag beantwoord worden wat er gebeurt met grootheden zoals de bewegingsenergie, en de hoeveelheid interne draaiing in de stroming, de *enstrofie*. Deze twee grootheden zijn gerelateerd aan *normen* in van elkaar verschillende oneindigdimensionale vectorruimten. De energienorm is de wortel uit de totale hoeveelheid bewegingsenergie en voldoet, net als de enstrofienorm, aan *dezelfde* axioma's als de Pythagorasnorm. De vraag hoe het in



Oplossingen van de differentiaalvergelijking $u'(t) = u(t)^2$ blazen op: ze gaan naar oneindig in eindige tijd.



Turbulentie: Gegeven een beginsnelheidsveld en een gegeven totale bewegingsenergie, ligt het snelheidsveld in de toekomst dan volledig vast?

deze normen zit met convergentie van Cauchyrijen, sla ik nu maar even over.

Het *werkelijke* probleem is dat de ruimte met de *ene* norm beter is voor het *bestaan* van oplossingen, terwijl de ruimte met de *andere* norm beter is voor *uniciteit*. Tussen deze twee *niet-equivalente normen* zit een gat, waardoor het gewoon niet lukt om de stelling over goedgesteldheid te bewijzen. Misschien is de stelling wel niet waar. De grote vraag is of de enstrofie een explosieve groei kan vertonen. Zoals dat bijvoorbeeld kan gebeuren met oplossingen van *gewone* differentiaalvergelijkingen. Daarmee zou de oplossing in de ruimte die is uitgerust met de enstrofienorm uit het zicht verdwijnen, en de door de oplossing beschreven stroming *spontaan* turbulent worden.

Veranderende vormen

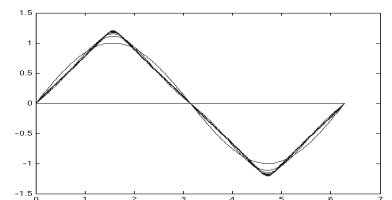
Anders dan om bewegende punten bij *eindigdimensionale* systemen gaat het bij *oneindigdimensionale* systemen om veranderende vormen. Een eenvoudig voorbeeld is een ongedempt trillende snaar. De *grondtoon* van de snaar heeft op het moment van maximale uitwijking dezelfde vorm als de grafiek van de sinusfunctie. De snaar is het stuk van de grafiek tussen 0 en π . De verticale eenheid van lengte is hier natuurlijk veel kleiner dan de horizontale eenheid, anders knapt de snaar. Ik *schaal* nu de grafiek in horizontale richting met een factor *twee*. Dat geeft het profiel van de *eerste boventoon*, waarin de snaar *twee keer* zo snel trilt als in de grondtoon. De *tweede boventoon* correspondeert met schalings-

factor *drie*, de derde met vier, enzovoorts.

In een trillende snaar kunnen *al deze* tonen met een bepaalde amplitude en een bepaalde fase voorkomen, en heeft de snaar op elk tijdstip een profiel, dat wordt gegeven door een *combinatie* van geschaalde sinusfuncties.

$$y = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots$$

De oneindige som in het rechterlid heet een Fourierreeks, en wordt vastgelegd door de Fouriercoëfficiënten, $a_1, a_2, a_3, \dots$, die ik kan zien als de coördinaten van een *punt*. De formule legt zo een *verband* tussen enerzijds, de vorm van de snaar, en anderzijds, punten in een, middels de juiste keuze van een norm, nog nader te specificeren *oneindigdimensionale* ruimte.



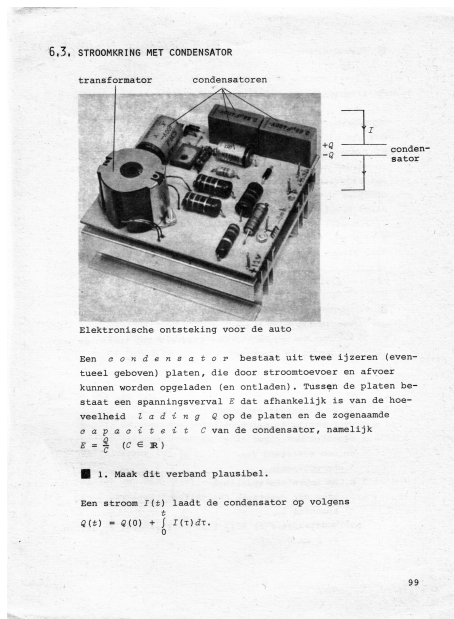
We zien hier de grafiek van de functies $\sin x$, $\sin x - 1/3^2 \sin 3x$, $\sin x - 1/3^2 \sin 3x + 1/5^2 \sin 5x$, enz. Er ontstaat een zaagtand. Deze vorm van de snaar is kenmerkend gekoppeld aan het punt $(1, 0, -1/3^2, 0, 1/5^2, 0, \dots)$.

Complexe getallen op de middelbare school

Ik keer terug naar het begin. Zoals ik al opmerkte maakten we op school bij wiskunde vooral *sommen*. In de bovenbouw van het voorbereidend wetenschappelijk onder-



Complexe getallen van Bert Nijdam en Hans Freudenthal. Het boek, dat in de tachtiger jaren gebruikt werd bij het vak Wiskunde 2, bevat tal van toepassingen van complexe getallen, zoals de hierboven afgebeelde elektronische schakeling.



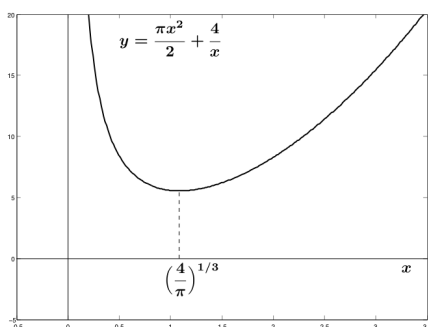
wijs had ik *twee* wiskundevakken, Wiskunde 1 en Wiskunde 2. Bij Wiskunde 1 gingen de sommen veelal over functies en over differentiaalrekening. Wiskunde 2 was abstracter. Buiten het eindexamenprogramma om hadden we een keuzeonderwerp over *complexe getallen*, uit een boekje van Freudenthal en Nijdam. Ik heb het boekje nog even ingekeken. Anders dan bij de schoolboeken van nu kan dat zonder zonnebril. Het bevat een prachtige combinatie van *abstracte* wiskunde en *concrete* toepassingen. Rekenen met het imaginaire getal i waarvoor geldt dat

$$i^2 + 1 = 0$$

en dat voorkomt in deze verbazingwekkende, maar onvermijdelijke formule voor de vijf belangrijkste getallen in de wiskunde:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Maar ook: toepassingen op elektrische scha-



Welke afmetingen moet een cilindervormig blik hebben opdat, gegeven het volume, de oppervlakte minimaal is?

kelingen en gedempte trillingen. Die toepassingen snapte ik toen nog niet allemaal maar dat ik *wiskunde* ging studeren was inmiddels zeker.

De datum van mijn oratie heb ik vastgelegd *voordat* ik wist dat vandaag in Utrecht Freudenthal zou worden herdacht. Een van de leraars op school zei regelmatig dat Freudenthal voorspeld had dat rond het jaar 2010 wiskunde als zelfstandig vak uit de schoolcurricula verdwenen zou zijn. In verband met deze voorspelling kreeg ik via Chris Zaal, van Rainer Kaenders het volgende citaat van Freudenthal uit 1973:

“Unter all den Argumenten für das Unterrichten einer von den Anwendungen isolierten Mathematik kann ich nur das eine verstehen: das der Inkompetenz.”

Het schoolvak Wiskunde 2 bestaat inmiddels niet meer, en ook het genoemde boekje wordt niet meer op het VWO gebruikt.

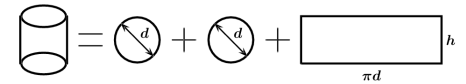
In plaats van het vak Wiskunde 1 zijn de Wiskunde B varianten gekomen. Bij Wiskunde B leren scholieren nog steeds wat een *functie* is, een woord dat in wiskundige context te herleiden is tot het Latijnse werkwoord *fungor*, ik voer een taak uit, bij Leibniz. Op de rekenmachine is het knopje x^2 de kwadraatfunctie die, bij elke invoer, als uitvoer het kwadraat van de invoerwaarde teruggeeft. Ook de *sinusfunctie* is een voorbeeld van een wiskundige functie, op de rekenmachine het knopje $\sin$.

De grafiek van de sinusfunctie bestaat uit alle punten in het (x, y) -vlak, waarvoor $y = \sin x$. In deze gelijkheid is x de *onafhankelijke*, en y de *afhankelijke* variabele. Standaard

bij Wiskunde 1 waren sommen waarin, zonder elektronische hulpmiddelen, de grafiek van een gegeven functie moest worden geschetst.

Schaling

Zoals bijvoorbeeld de functie in de grafiek hiernaast, die voorkomt in de uitwerking van een sommetje waarvan de praktische relevantie evident is: welke *afmetingen* moet een cilindervormig blik hebben opdat, gegeven het volume, de oppervlakte minimaal is?



Het materiaal voor het blikje

Met hoogte h en diameter d wordt de totale oppervlakte A van onder-, boven- en zijkant gegeven door

$$A = \frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi d^2}{4} + \pi d h.$$

Het volume $V = \frac{\pi d^2}{4} h$ stel ik voor het gemak gelijk aan 1. Daaruit volgt dan dat de hoogte uitgedrukt kan worden in de diameter, en dat geeft me als nieuwe formule voor de oppervlakte

$$A = \frac{\pi d^2}{2} + \frac{4}{d}.$$

als functie van de diameter d . De oppervlakte is minimaal als de diameter gelijk is aan $\frac{4}{\pi}$ tot de macht $\frac{1}{3}$, hetgeen voor de hoogte *dezelfde* waarde geeft omdat het volume gelijk is aan 1. Het qua oppervlakte *zuinigste* blikje heeft dus de *verhouding* tussen diameter en hoogte gelijk aan 1.

Deze conclusie hangt *niet* af van de aanname over het volume. Door de eenheid van lengte te schalen kan ik V immers veranderen in *elke* waarde die ik wil. De verhouding tussen diameter en hoogte is een *getal* waarin geen fysische eenheden voorkomen, en *ziet* de keuze van de lengte-eenheid niet.

Dit schalingsargument is van dezelfde aard als de redenering waarmee de beroemde Engelse toegepaste wiskundige Sir Geoffrey Ingram Taylor de Amerikaanse legertop in verlegenheid bracht, door uit te rekenen *hoeveel energie* er was vrijgekomen bij de eerste nucleaire proefexplosie in New Mexico. Dat deed hij door op te merken dat de juiste combinatie van straal, tijd, luchtdichtheid en energie *niet* van de keuze van de fysische eenheden afhangt.

Schalingsargumenten zagen we ook al bij

de trillende snaar. In de *differentiaalrekening* betekent differentieerbaarheid dat inzoomen, schalen dus, *recht* moet maken wat krom is. Als ik, inzoomend op een punt van de grafiek van een functie, een *rechte lijn* zie verschijnen, dan is terug uitzoomend deze lijn de *raaklijn* aan de grafiek.

In de grafiek ziet u de functie van het blikje, samen met zijn afgeleide functie. De afgeleide functie is *alleen* nul als x gelijk is aan $\frac{4}{\pi}$ tot de macht een derde. Dat is de *waarde* van de diameter zojuist die de oppervlakte van het blikje met volume gelijk aan 1 minimaliseert.

Niet-lineair gedrag

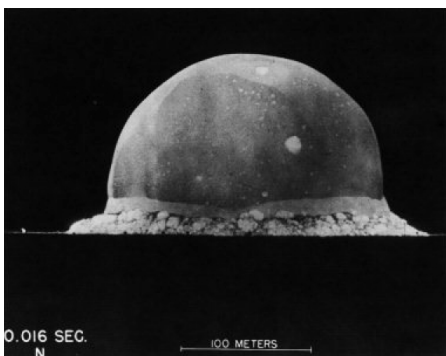
Tot nu toe heb ik het gehad over functies *gegeven* door een formule. Vergelijkingen waarin *onbekende* functies samen met hun afgeleiden voorkomen heten *differentiaalvergelijkingen*. Bij eindigdimensionale systemen is de snelheidsvector van het door de ruimte bewegend punt de afgeleide van $\mathbf{x}(t)$ naar t . De bewegingsvergelijking, die de snelheidsvector $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$ uitdrukt in de positie van het punt, is een differentiaalvergelijking

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t)),$$

voor de onbekende functie $\mathbf{x}(t)$.

Bij mechanische systemen is het niet de *snelheid* die vastgelegd wordt door de positie, maar de *versnelling*. Sinds Newton weten we dat het zwaartekrachtsveld van de zon de snelheden van de planeten beïnvloedt. Het was daarom dat Newton de differentiaalrekening bedacht, waarmee de *versnelling*, ofwel de acceleratie, gedefinieerd kon worden als de afgeleide van de snelheid, de *tweede* afgeleide van de positiefunctie dus.

Zo kon hij zijn wetten voor zwaartekracht en versnelling formuleren als bewegingsvergelijkingen. Voor een zonnestelsel met maar één planeet leidde hij af dat de planeetbaan inderdaad een ellips is, in overeenstemming



De eerste experimentele nucleaire proefexplosie in New Mexico

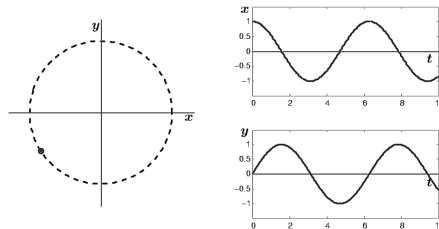
met Kepler's eerder empirisch bepaalde wetten. Een klein wonderdje want de vergelijkingen zijn uiterst niet-lineair.

Niet-lineair betekent *niet linear*. De slingervergelijking

$$x''(t) = -x(t),$$

is een *lineaire* differentiaalvergelijking omdat het verband tussen de onbekende functie en zijn afgeleiden lineair is. De onbekende functie $x(t)$ wordt hier gezien als de *uitwijking* ten opzichte van een evenwichtstoestand. Deze *tweede* orde differentiaalvergelijking zegt dat op elk moment de versnelling in grootte gelijk is aan de uitwijking, maar *tegengesteld* in richting.

Door de *eerste* afgeleide van x gelijk te stellen aan $-y$, wordt de eerste afgeleide van y gelijk aan x . Zo ontstaat uit een *tweede* orde differentiaalvergelijking een *systeem* van twee gekoppelde eerste orde differentiaalvergelijkingen $x'(t) = -y(t)$ en $y'(t) = x(t)$. Oplossingen van dit systeem bewegen over *cirkels* met middelpunt de oorsprong in het (x, y) -vlak. De oplossing die begint in het punt $(1, 0)$ ziet u hier.

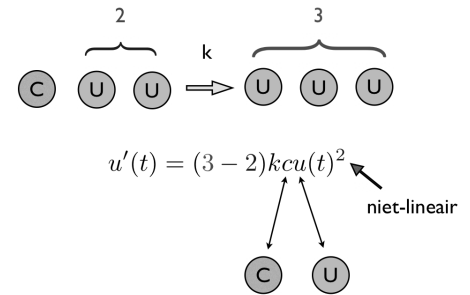


Als we de cirkel doorlopen met hoeksnelheid 1, dan is de uitwijking van de x -coördinaat gegeven door $\cos t$ (bovenste grafiek) en van de y -coördinaat gegeven door $\sin t$ (onderste grafiek).

Deze oplossing doorloopt de eenheidscirkel met hoeksnelheid gelijk aan 1. De functies $\cos t$ en $\sin t$ kunnen *gedefinieerd* worden als respectievelijk de eerste en de tweede coördinaat van deze oplossing. Het *eerste* positieve nulpunt van $\sin(t)$ is het getal π , de *tijd* benodigd voor het doorlopen van de bovenkant van de cirkel.

U ziet dat we van lineaire differentiaalvergelijkingen veel weten. Differentiaalvergelijkingen in wiskundige modellen zijn echter bijna *nooit* lineair. Ik kom terug op de chemische reacties. Als in een reactie 1 molecuul C en 2 moleculen U samen 3 moleculen U maken, waarbij stof C in overvloed aanwezig is, dan leidt dat tot een differentiaalvergelijking voor de concentratie $u(t)$ van molecuul U .

Hier is c de constant veronderstelde concentratie van molecuul C , en k de reactieconstante. U ziet hoe de *reactiekinetiek* de differen-



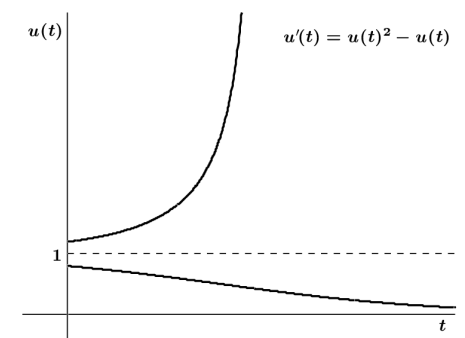
In een reactie maken één molecuul C en twee moleculen U samen drie moleculen U . De stof C is in overvloed aanwezig.

tiaalvergelijking *maakt*, die niet-lineair is vanwege het kwadratische rechterlid. Na schaling van de tijd met een factor kc om de coëfficiënt van $u(t)^2$ gelijk aan 1 te maken, zien we het volgende: het beginwaardeprobleem is nog steeds uniek oplosbaar maar in eindige tijd blaast de oplossing op, een *drastisch* verschijnsel, veroorzaakt door de kwadratische term in de vergelijking.

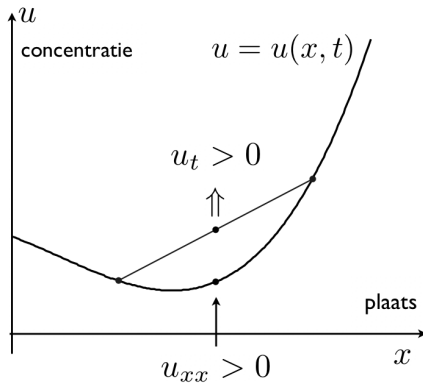
Ook bij de Navier-Stokes vergelijkingen voor de stroming van water zijn het de *kwadratische* termen die de boel in het honderd zouden kunnen sturen. Voor een snelheidsveld met een relatief *lage* enstrofie, dat wil zeggen *weinig* inwendige rotatie, blijft de enstrofie begrensd, en is het beginwaardeprobleem *goedgesteld*. Een *kariatuur* hiervan is te zien in het gedrag van oplossingen van de differentiaalvergelijking in de figuur hieronder. De kwadratische term krijgt *geen* kans als de beginwaarde kleiner is dan 1, maar *alle* oplossingen boven 1 blazen op in eindige tijd.

Verspreiding van een concentratie

De Navier-Stokes vergelijkingen zijn geen gewone maar *partiële* differentiaalvergelijkingen. Het gaat te ver om deze Navier-Stokes vergelijkingen hier in detail te bespreken, maar ik wil u toch wat over partiële differentiaalvergelijkingen vertellen. Ik ga daarom



Het al dan niet opblazen van de oplossing kan afhangen van de beginwaarde.



Als de tweede afgeleide van een functie in een punt groter dan 0 is, is het gemiddelde van de functiewaarden in de omgeving van dat punt hoger dan de functiewaarde in dat punt zelf. De functie is daar convex.

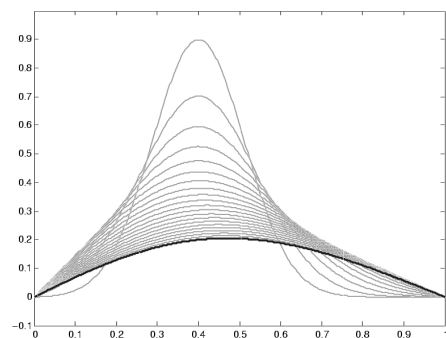
verder in de context van chemische reacties. De concentratie van een chemische stof, die ik nog steeds u noem, hangt over het algemeen *niet alleen* van de tijd maar *ook* van de plaatscoördinaten af, meestal drie. Als het reactievat een *dunne* lange buis is dan is u als functie van x en t een voor de hand liggende aanname, maar *één* plaatsvariabele dus.

$$u = u(\underbrace{x, y, z, t}_{3 \text{ plaatsvariabelen}})$$

$$u = u(\underbrace{x, t}_{1 \text{ plaatsvariabele}})$$

Laat ik in deze context door middel van een *heuristische* afleiding uitleggen wat het betekent dat een concentratie zich door *diffusie* verspreidt. Ik zet de concentratie u uit tegen de plaats x . In het plaatje is de gemiddelde concentratie *in de buurt* van het aangegeven punt hoger dan in het punt zelf. We hebben gezien dat dit betekent dat de tweede afgeleide van u naar de plaatsvariabele x positief is. Deze tweede afgeleide noteer ik nu niet met twee accenten maar met twee subscripten x .

Intuïtief is duidelijk dat de concentratie in dit punt *omhoog* moet gaan, hetgeen zich ver-



De concentratie verspreidt zich; de grafiek wordt egalier in de loop van de tijd.

taalt in het *positief* zijn van de afgeleide van u naar de *tijd*svariabele, aangeduid met subscript t . Ik concludeer dat in elk punt en op elk moment beide afgeleiden *hetzelfde* teken moeten hebben: allebei positief of allebei negatief. In het *simpelste* wiskundige model dat dit voor elkaar krijgt zijn *beide* afgeleiden gelijk:

$$u_t = u_{xx}.$$

De afgeleiden in deze vergelijking worden *partiële* afgeleiden genoemd, de vergelijking zelf is een *partiële* differentiaalvergelijking, en staat bekend als de lineaire *diffusievergelijking*, of ook wel *warmtevergelijking*, omdat ook warmte zich via diffusie verspreidt.

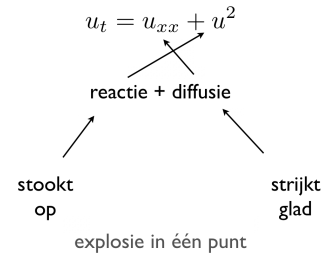
Ik los deze vergelijking op voor x tussen 0 en 1, onder de lineaire randvoorwaarde $u = 0$. Daarbij denk ik aan een geïsoleerde staaf waarvan de uiteinden op temperatuur nul worden gehouden. Net als bij de trillende snaar is de algemene oplossing een *combinatie* van geschaalde sinusfuncties:

$$u(x, t) = a_1(t) \sin \pi x + a_2(t) \sin 2\pi x + a_3(t) \sin 3\pi x + \dots$$

Hiernaast ziet u hoe de grafiek verandert in de tijd. Horizontaal staat weer x uit en verticaal $u = u(x, t)$. Elke component van de Fourierreeks dooft uit, maar de *eerste* het langzaamst en al snel is dat de *enige* component die we nog zien. Er gaat dus informatie verloren. Lopen we terug in de tijd dan wordt elke component juist *groter*, en gaat het onmiddellijk fout. De termen in de Fourierreeks zijn nu simpelweg *te groot* om de oneindige som *betekenis* te kunnen geven. We kunnen de warmtevergelijking dus alleen maar *vooruit* en *niet achteruit* in de tijd oplossen, een belangrijk verschil met wat we eerder gezien hebben bij de eindigdimensionale systemen gedefinieerd door *gewone* differentiaalvergelijkingen.

Reactie-diffusievergelijkingen

Zodra een partiële differentiaalvergelijking *niet-lineair* gemaakt wordt, bijvoorbeeld door diffusie met reactie te combineren zoals in deze reactie-diffusievergelijking hiernaast, is het wat betreft exact oplossen in het algemeen einde verhaal. Reactie-diffusievergelijkingen hebben een totaal *andere* achtergrond dan de Navier-Stokes vergelijkingen maar de wiskundige vraagstelling is deels hetzelfde, zoals bijvoorbeeld de vraag naar opblazen in eindige tijd of ander, zoals we zeggen, sin-



gulier gedrag. Hierbij is er competitie tussen twee mechanismen: reactie en diffusie. Reactie stookt op, diffusie strijkt glad. De *combinatie* zorgt ervoor dat het opblazen *gelokaliseerd* blijft.

Numerieke simulaties laten zien wat er gebeurt. De oplossing in beide plaatjes is hetzelfde maar *rechts* is de concentratie *geschaald*. In eindige tijd, namelijk als $t \rightarrow T$, blaast de oplossing op. Dat gebeurt slechts in *één* punt.

In het rechterplaatje ziet u de oplossing in gelijkvormigheidscoördinaten. Horizontaal staat nu

$$\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{T-t}},$$

en verticaal

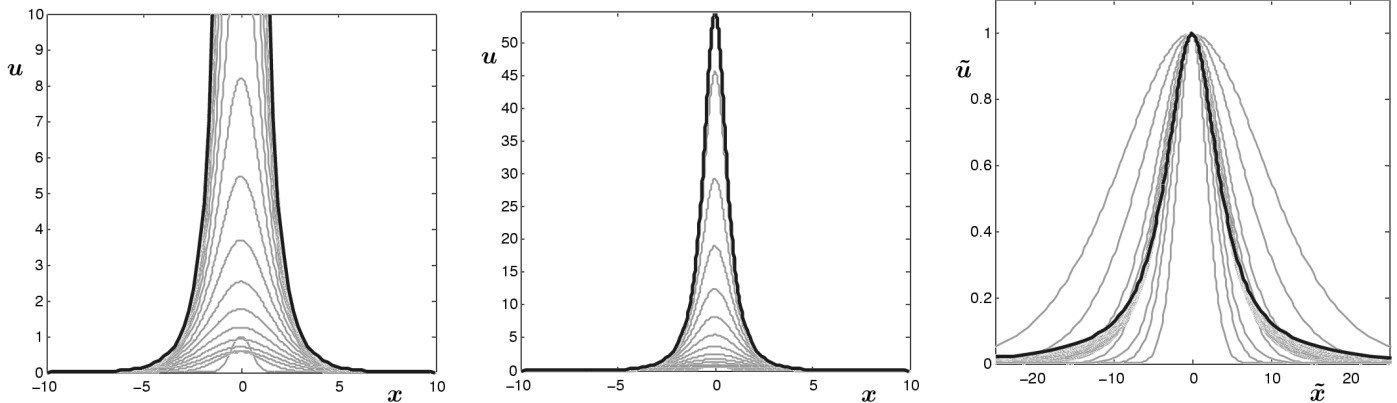
$$\tilde{u} = (T-t)u(x, t).$$

In deze coördinaten varieert de oplossing nog wel maar dat gebeurt zo langzaam dat je het bijna niet ziet. Om precies te beschrijven wat de oplossing doet moet de informatie uit *meerdere* coördinaatssystemen aan elkaar geplakt worden. Dit maakt het *onmogelijk* om in één goed gekozen oneindigdimensionale ruimte de oplossingen te beschrijven.

Diffusie zonder reactie op een bol

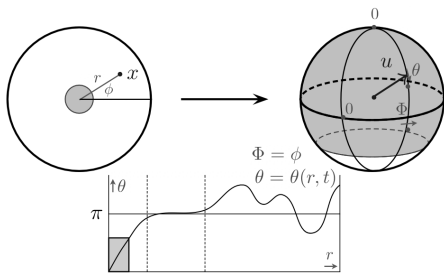
Ook *zonder* reactie kan diffusie tot singulier gedrag leiden. De afhankelijke variabele u in het volgende voorbeeld is 3-dimensionaal maar als restrictie leg ik op dat de lengte van u gelijk is aan 1. u kunt denken aan u als een pijltje dat een oriëntatie vastlegt in een vloeibaar kristal, of in een ferro-magneet.

Ik leg u vast door twee hoekcoördinaten, net als op de globe. De eerste hoek Φ komt overeen met de lengtegraad die 0 is in Greenwich en oploopt in oostwaartse richting. De tweede hoek is θ , de poolhoek, die 0 is in de Noordpool en oploopt in zuidwaartse richting. Deze hoek is op de evenaar 90 graden en in de Zuidpool 180, ofwel π in radialen. Als ik door de Zuidpool heenloop laat ik θ gewoon doorlopen. De onafhankelijke variabele x neem ik



Reactie stookt op; diffusie strijkt glad. Blijft het opblazen gelocaliseerd? Links: ongeschaald; midden: u geschaald; rechts: in gelijkvormigheidsvariabelen

in het vlak, en leg ik vast door de afstand r tot de oorsprong en de hoek ϕ die $\mathbf{x}$, gezien als vector, maakt met de eerste coördinaat-as. We kijken nu naar afbeeldingen die de disk op het boloppervlak afbeelden. Daarbij komt bijvoorbeeld het relatief kleine grijze gebied links terecht op het relatief grote grijze gebied rechts.

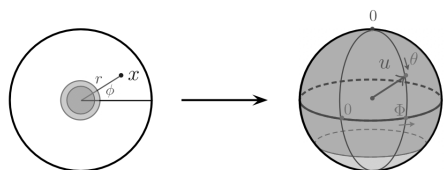


Diffusie zonder reactie op een bol

Als we de hoek Φ op de bol gelijk nemen aan de hoek ϕ in de disk dan laat de diffusievergelijking voor u oplossingen toe die corresponderen met een functie θ die alleen van r en van t afhangt. In deze coördinaten moet de oplossing voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\theta_t = \theta_{rr} + \frac{\theta_r}{r} - \frac{\sin(2\theta)}{2r^2}.$$

Michiel Bertsch en zijn groep in Rome, in samenwerking met Rein van der Hout die bij



De partiële differentiaalvergelijking voor $\theta(r, t)$ vertoont singulariteiten in eindige tijd. Dit betekent dat het beeld van de steeds kleinere disk links, de bol rechts nog geheel overdekt, terwijl in eindige tijd de oppervlakte van het schijfje links naar 0 gaat.

AKZO-Nobel dit probleem als wiskundig model voor nematische vloeibare kristallen heeft geformuleerd, hebben laten zien dat oplossingen van deze vergelijking *in eindige tijd* singulariteiten kunnen ontwikkelen. In het plaatje hieronder betekent dat dat een disk links, waarvan het beeld het boloppervlak rechts precies één keer overdekt, *ineenkrimpt* tot een punt. Een hele overdekking van de bol, en daarmee het stuk van de grafiek met θ tussen 0 en π in het (r, θ) -vlak, verdwijnt zo in het niets.

Generiek gaat het ontstaan van deze singulariteit gepaard met maar liefst *drie* schalen waarin de oplossing verschillend gedrag vertoont.

De middelste en de buitenste schaal (rechts) zijn hetzelfde als bij de reactie-diffusievergelijking, maar binnenin (links) zit nog een derde schaal. Als we daarop inzoomen, zien we dat de oplossing convergeert naar een evenwichtoplossing die meeschaalt naar binnen met $R(t)$. In de middelste schaal convergeert de oplossing naar π . In de buitenste schaal (rechts) zien we het θ -profiel ontstaan dat overblijft na de vorming van de singulariteit, en dat vervolgens verder evolueert.

In werk met John King en Jan Bouwe van den Berg, is het gelukt dit *quasi-stationaire* gedrag in zoverre te begrijpen dat we hebben kunnen uitrekenen dat

$$R(t) \sim \frac{T - t}{\ln^2(T - t)}.$$

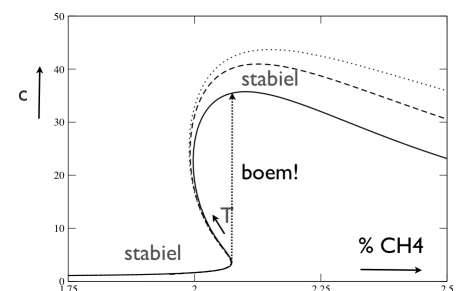
Het vermoeden bestaat dat het zojuist beschreven singuliere gedrag in wezen *de enige manier* is voor oplossingen om singulier te kunnen worden. Met θ en Φ allebei afhankelijk van r , ϕ en t , maar Φ wel in de buurt van ϕ , lijken numerieke simulaties dat te bevestigen. Het lijkt of oplossing symmetrisch wordt in de buurt van de singulariteit; recent werk

van Jan Bouwe van den Berg en JF Williams weerspreekt dit echter.

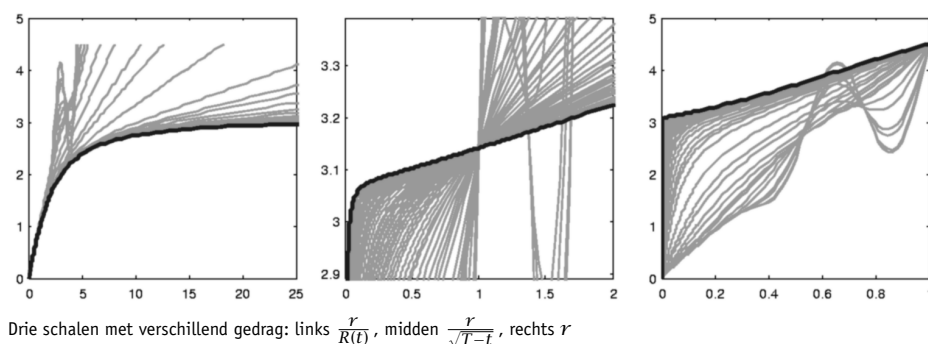
Alles is variabel

Veel partiële differentiaalvergelijkingen leven *niet* op een gebied met een *vaste* rand. Smeltend ijs in water, groeiende kankercellen, vlamballen, vloeibaar glas, verdruppels, stromingen in poreuze media, al deze processen leiden tot wiskundige modellen waarbij *de rand* van het gebied waarin de vergelijkingen zijn gesteld *een van* de onbekenden van het systeem is. Met Jan Bouwe van den Berg en twee promovendi, Vincent Guyonne en Hala Elrofai, werken we aan vrije randproblemen die vlammen modelleren in gasmengels. Bijvoorbeeld een lopend vuurtje in een buis.

De vlam beweegt van rechts naar links, met snelheid c en temperatuur T . Als het gasmengsel vervuild is met stof dan vindt er via straling een herverdeling van warmte plaats die de snelheid en de temperatuur van de vlam aanzienlijk kan beïnvloeden.



Een vlam beweegt van rechts naar links door een buis met snelheid c en temperatuur T . Door vervuiling van het gasmengsel met stof, vindt er via straling een herverdeling van warmte plaats die de snelheid en de temperatuur van de vlam beïnvloedt. Voor verschillende waarden van de opaciteit van het mengsel is het verband tussen de fractie brandbaar gas in het mengsel, de snelheid waarmee de vlam zich voortplant in de buis, en de temperatuur van de vlam die oploopt langs de S-vormige krommen getekend. Waar de krommen naar rechts bewegen met toenemende T , zijn de vlammen stabiel. Als de fractie brandbaar gas toeneemt, bewegen we over de kromme naar rechts. Aangekomen in het onderste keerpunt van de S-vorm verliest het vlammetje zijn stabiliteit en ontstaat er een overgang naar een veel hetere en snellere vlam.



Hier ziet u in één figuur, voor verschillende waarden van de opaciteit van het mengsel,

het verband tussen de fractie brandbaar gas in het mengsel, de snelheid waarmee de vlam zich voortplant in de buis, en de temperatuur van de vlam die oploopt langs de S-vormige krommen. Waar de krommen naar rechts bewegen met toenemende T , zijn de vlammen stabiel. De fractie brandbaar gas zie ik nu als controleparameter, bij wijze van spreken een knop waaraan ik kan draaien. Beginnend bij het stabiele vlammetje dat correspondeert met een punt linksonder op de kromme, draai ik de knop omhoog en loop ik over de kromme naar rechts. Aangekomen in het onderste keerpunt van de S-vorm verliest het vlammetje zijn stabiliteit, en is er een overgang naar een veel heterere en snellere vlam, met alle gevolgen van dien.

Herverdeling van warmte via *straling* speelt ook een rol bij de verklaring van experimenten in de Space Shuttle. Die hebben aange-

toond dat bolvlammen, anders dan vermoed sinds Zel'dovich, wel degelijk stabiel kunnen zijn. Met Claude-Michel Brauner in Bordeaux en de groep van Alessandra Lunardi in Parma werken we aan de stabiliteitsanalyse.

Vrije randen kunnen ook ontstaan als een diffusie-achtige vergelijking in bijvoorbeeld $u = 0$ van karakter verandert. Dit komt voor bij de modellering van stromingen in poreuze media, een veelbeoefende tak van sport in Nederland, met Hans van Duijn als voortrekker. Wiskundig gezien ben ik als beginnend onderzoeker opgegroeid met een gedegeneerde diffusievergelijking die er in 2 ruimtedimensies zo uitziet:

$$u_t = (u^m)_{xx} + (u^m)_{yy}.$$

Met $m = 2$ modelleert deze vergelijking de hoogte van het grondwater in een zandbodem, rustend op een vlakke rotsgrond. Met $m = 4$ is u de dikte van een olie- of verlaagje op een vlakke plaat. Droge plekken omringd

door vloeistof worden in eindige tijd volledig gevuld. Pas onlangs is uit werk van onder andere Sigurd Angenent gebleken dat de droge plek *niet*, zoals je zou verwachten, *rond* wordt tijdens het verdwijnen.

In een artikel met Don Aronson en Jan Bouwe van den Berg is bewezen dat de relevante component in een Fourierachtige expansie, die verstoringen van ronde oplossingen beschrijft, inderdaad altijd groeit. Blijkbaar is de natuur *niet altijd* bezeten van symmetrie. Wanneer wel en wanneer niet, en waarom, blijft een intrigerende vraag.

Vanuit de werkelijkheid en terug

In het voorafgaande heb ik een indruk gegeven van het vakgebied van de niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, zoals die voorkomen in wiskundige modellen voor verschijnselen in de werkelijkheid. Als wiskundige houden we ons bezig met het oplossen van deze vergelijkingen.

Dit betekent dat we het bestaan en het gedrag van oplossingen vanuit de vergelijkingen willen begrijpen en verklaren. Uitrekenen wat er gebeurt, op wat voor manier dan ook, en vervolgens bewijzen dat het antwoord goed is; dus op een manier waar aan de wiskundige zuiverheid recht wordt gedaan en waarbij tegelijkertijd gecontroleerd wordt of de oplossingen aan het werkelijke gedrag beantwoorden. Precies dat zijn de sommen waar we ons mee bezighouden.

