De TAL-boekjes tegen het licht gehouden

De NRC schreef op vrijdag 28 augustus 2009 dat de meeste ouders niet weten of hun kind op school rekenen leert volgens de methode van het realistisch rekenonderwijs, en evenmin wat die methode precies inhoudt. Zij wisten dus niet dat alle rekenmethodes die thans op de markt zijn, *realistisch* zijn. De didactische grondslag ervan is beschreven in zogenaamde TAL-boekjes, waarbij TAL staat voor Tussendoelen Annex Leerlijnen. Het TAL-project werd gecoördineerd door het Freudenthal Instituut. Het blijft de moeite waard om die TAL-boekjes kritisch tegen het licht te houden, te meer daar ook het reken- en wiskundeonderwijs op de Nederlandse pabo's er nog steeds volledig door wordt gedomineerd.
Ik begin met de TAL-boekjes *Jonge kinderen leren rekenen, ISBN 9001851800* en *Kinderen leren rekenen, ISBN 9001851002* over het gewone rekenen in de onder- en bovenbouw van de lagere school (groep 1 tot en met groep 8), zie

`http://www.fi.uu.nl/~marjah/documents/TAL_publicaties_NL.pdf`

Daarna komt het TAL-breukenboekje aan de orde.

Getallen zijn goed, cijfers zijn fout

Centraal in de TAL-boekjes staat de gedachte dat het kind er baat bij heeft dat de getallen in hun waarde worden gelaten en de aanvechtbare constatering dat met name de klassieke cijfermethode hierin te kort zou schieten. Deze cijfermethode wordt bijvoorbeeld gebruikt door mijn biologische slager. Achter de bestelde produkten, meestal meer dan twee, schrijft hij de prijzen en telt die vervolgens per kolom bij elkaar op, beginnende vanaf rechts, met onthouden enzovoort, precies zoals ik dat destijds als kind geleerd heb. Deze methode werkt snel, efficiënt en goed als je *zorgvuldig* let op welke cijfers voor de 1-tallen, 10-tallen etc. staan. Een belangrijke les voor nu en voor later. Het TAL-bovenbouwboekje betoogt dat het veel realistischer is om vanaf links te rekenen en uitgelegd wordt hoe dit in zijn werk gaat als bijvoorbeeld twee getallen van drie cijfers bij elkaar worden opgeteld. Deze buitengewoon omslachtige manier van realistisch optellen wordt *kolomrekenen* genoemd. De niet onderscheidende naamgeving is karakteristiek. Uitgelegd wordt dat deze methode de getallen meer in hun waarde laat. Storend is de incomplete uitleg van de *realistische* kolomrekenmethode. Alleen sommen van twee getallen worden behandeld. Met meer kun je het maar beter niet proberen.

Realistisch of mechanistisch

Ook aftrekken, vermenigvuldigen en delen worden behandeld. In de manier waarop kolomdelen wordt uitgelegd, herken je gewoon de ouderwetse staartdeling. Leg ze naast elkaar en je ziet dat de staartdeling een verkorte notatie is, meer niet. De realistische uitleg ziet echter over het hoofd dat het cijferend aftrekken wel degelijk ook onderdeel is van de kolomdeelmethode.
De cijfermethode heeft dan inmiddels het label *mechanistisch* opgeplakt gekregen. Bij dat woord denk ik met een warm gevoel aan mechaniekjes, apparaatjes of methoden die het *doen*, zoals de staartdeling bijvoorbeeld. Maar zo wordt het label niet gebruikt. Op pagina 66 van het het onderbouwboekje lezen we al: *In*

de geschetste realistische didactiek van vermenigvuldigen en informeel delen en het leren van de tafels, wordt niet direct en uitsluitend op het reproduceren van de tafels aangestuurd via herhaald optellen, zoals vroeger in de mechanistische methodiek gebeurde via klassikaal uitgevoerde klaagzangen. Het staat er echt. Maar herhaald optellen? Ging het niet om uit het hoofd leren?

Trucjes of methoden, goede of slechte notaties

Veel aandacht wordt in de TAL-boekjes besteed aan hoofdrekenen. Daarbij valt op dat het onderscheid tussen (de spaarzaam gepresenteerde) methoden en (een veelheid van) slimme trucjes niet gemaakt wordt. Om maar wat te noemen, een trucje dat alleen werkt voor sommen waarin toevallig een van de getallen eindigt op een 9 moet je natuurlijk geen methode noemen. Rijgend hoofdrekenen via de 10-tallen is wel een methode, zoals

$$8 + 7 = 8 + 2 + 5 = 10 + 5 = 15.$$

Daarentegen is

$$8 + 7 = 8 + 8 - 1 = 16 - 1 = 15$$

weer niet meer dan een trucje voor een sommetje waarin de twee getallen in de som toevallig 1 verschillen. Methoden werken algemeen en geven houvast, trucjes niet. De nadruk op trucjes is vooral voor kinderen met minder rekentalent funest.

Bovendien, nog los van de vraag hoeveel tijd je überhaupt wil besteden aan het uitrekenen van $8 + 7$, gebruik altijd goede notatie. Maak duidelijk wat je doet. Met onderscheid tussen tussenstappen en tussenresultaten. Goed is inderdaad

$$8 \xrightarrow{+2} 10 \xrightarrow{+5} 15.$$

Maar notaties als

$$8 + 2 \longrightarrow 10 + 5 \longrightarrow 15,$$

scheppen alleen maar verwarring, en het is de laatste notatie die overgenomen is in de diverse stukken die naar zijn OC&W gegaan.

Tellen en tellen is twee

Ook realistisch rekenen begint met tellen, maar anders dan je zou verwachten. In het onderbouwboekje begint de uitleg over het betreffende leerproces met de concepten *tweeheid, drieheid en veelheid*. Het concept *eenheid* wordt niet genoemd, tellen begint kennelijk bij 2. Ik vraag me af of dit verband houdt met de talige spitsvondigheid waarmee vervolgens op pagina 16 onder het kopje *Leren tellen* ter zake wordt gekomen. Daar lezen we:

Tellen en tellen is twee. Ten eerste kan tellen het opzeggen van een rijmpje zijn. Het is een woordenrij die in een liedje past of het ritmische bewegen ondersteunt of als aanloop van een handeling dient. Dit zogenoemde akoestische tellen doet zich voor bij traplopen, verstoppertje spelen en andere vormen van aftellen. Ten

tweede dient de telhandeling om aantallen te bepalen en maten te nemen. Dit heet resultatief tellen en vormt de grondslag voor het rekenen.
Talig maar verwarrend. Verstoppertje gaat toch met 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10, wie niet weg is is gezien? En aftellen gaat toch omlaag? Wat later wordt uitgelegd dat getallen eerst contextgebonden (leeftijd, hoe oud ben je?) en daarna objectgebonden (aantal kaarsjes op de taart) verschijnen. Waarom deze volgorde vanzelfsprekend is en waarom *uiteraard* de eerste didactische vraag de overgang van het context- naar het objectgebonden niveau moet betreffen, wordt niet uitgelegd.

TALig rekenonderwijs in de taal van het kind

Centraal in alle TAL-boekjes staat de overtuiging dat het rekenonderwijs uit moet gaan van het kind. Door kinderen zelfbedachte benamingen worden daarbij overgenomen. Als voorbeeld noem ik de benaming eerlijk en oneerlijk voor de even en oneven gehele getallen. 5 is niet eerlijk, want 5 objecten kun je niet over twee kinderen verdelen. Maar wat betekent dit nu eigenlijk? 9 is deelbaar door 3 maar ondanks dat oneerlijk. Eerlijk delen kan klaarblijkelijk alleen met twee kinderen. De grondleggers van het realistisch rekenonderwijs willen zo graag taalrijk zijn dat betekenis ondergeschikt wordt. Zo wordt TAL als TAL=getal dubieus gebruikt in het woord TALgedaanten en foutief in het woord TALrijk, als wordt stilgestaan bij een *talrijk en taalrijk* voorbeeld van een leeromgeving, waarin een schildpad een magisch vierkant op zijn schild heeft. Een TALige context die alleen maar afbreuk doet aan de behandeling van een leuk onderwerp dat echter nauwelijks in de basisrekenlessen thuishoort.

Appels of kilo's

Wat het kind betreft, de overtuiging dat het kind alles zelf moet ontdekken en leren begrijpen wordt met kracht uitgedragen. Systematisch oefenen is minder relevant. Systematiseren en automatiseren lijken ongezonde *mechanistische* bezigheden te zijn waar het kind niet aan blootgesteld moet worden. Groepsdiscussies zijn belangrijker, zoals bijvoorbeeld een discussie voorgesteld door de projectleider in de Volkskrant van 23 maart 2009, in het kader van de som $62 - 57 = 5$. In een context met kilogrammen komen ene Ad, zijn kat en een weegschaal voor. Ad staat met de kat op de weegschaal en leest 62 af. Zonder kat is het gewicht 57. De kat weegt dus 5 kilo zou je zeggen, maar daar is wel een groepsdiscussie over een eventueel gewicht van 4 of 6 voor nodig. Het gaat hier over sommen met *gehele* getallen. In een goede realistische context behandel je zo'n som met bijvoorbeeld appels, maar natuurlijk niet met kilo's. Dit voorbeeld is illustratief voor de willekeurige keuze van contexten en laat zien wat er gebeurt als je rekenen wilt uitleggen zonder jezelf af te vragen wat een *geschikte context* is. Het onderwerp van de discussie is op zich natuurlijk wel relevant, *maar nu nog niet*. Voortdurend is in de uiteenzettingen van de realistische rekenaars een gebrek aan conceptueel onderscheid te herkennen en een daarmee samenhangende verwarrende naamgeving. Bijvoorbeeld het woord lijnmodel, dat in het TAL-onderbouwboekje eerst zowel voor discreet en continu staat, waarna vervolgens een telraam als een combinatie van een lijn- en een groepjesmodel wordt besproken.

Verhoudingen

Dat begrijpen via een groepsdiscussie belangrijker is dan zelf kunnen wordt ook in het recentere TAL-boekje *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen, ISBN 9789001851064* uit 2006 systematisch beleden. Wat betreft de onderlinge samenhang van deze vier lastige begrippen zijn de schrijvers tot de conclusie gekomen dat verhoudingen het overkoepelende begrip zijn, met als belangrijk stuk gereedschap de verhoudingstabel. Uitgelegd wordt dat dergelijke verhoudingsproblemen vroeger genoteerd werden op een manier die door veel leerlingen niet echt begrepen werd, maar een prachtkans om kruislings vermenigvuldigen helder te introduceren wordt gemist.
In Hoofdstuk 2, op pagina 33, zien we vier begrippen:

breuken	verhoudingsnotatie
kommagetallen	procenten

Waar beter over decimale representatie kan worden gesproken, krijgen de onderste twee de naam *gestandaardiseerd*. Decimaal gestandaardiseerde getallen krijgen van de schrijvers vanaf het begin de voorkeur boven de gewone breuken.

Breukrekenen of schattend breukrekenen

Rekenen met breuken is volgens de schrijvers makkelijker in decimale vorm. Soms is dat misschien zo, bijvoorbeeld in een niet representatief gekozen voorbeeld als

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{5} = 0.5 + 0.8 = 1.3\,,$$

excuses voor de decimale punt in plaats van de Nederlandse komma. Ronduit misleidend is dan dat voorbeelden als

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0.333\ldots + 0.166\ldots = 0.499\ldots$$

achterwege blijven, om maar niet te beginnen over

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = 0.333\ldots \times 0.166\ldots$$

Hoe het precies zit met breuken en hun repeterende decimale ontwikkelingen komt alleen zijdelings aan de orde via een toch al kansloze aanpak met de rekenmachine. Zo ligt de decimale ontwikkeling van $\frac{1}{17}$ met een periode van 16 cijfers (0.0588235294117647 en daarna herhaalt het zich) buiten het bereik van wat je door even intikken kunt verifiëren. Voor de staartdeling, een mechaniekje dat werkt, efficiënt, elegant en bovenal *transparant*, is $\frac{1}{17}$ echter geen enkel probleem. Je kunt de staartdeling leren gebruiken zonder hem meteen te hoeven begrijpen en al gebruikend leren hem te begrijpen. Niet meteen met $\frac{1}{17}$ natuurlijk, eerst maar eens met $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{7}$ of zo. Zo leer je wat *gestandaardiseerde* vormen van breuken zijn. *Learn to use en use to learn*, om maar eens een reclameslogan van de ICT-lobby te gebruiken.

De schrijvers maken echter andere keuzes. Is het verband tussen de breuk en de decimale ontwikkeling lastig, dan wordt er meteen geschat. Schattend rekenen is rekenen waarbij je de som vervangt door een som die makkelijker is en hoopt dat het antwoord nog een beetje goed is. In de TAL-cultuur is dit schattend rekenen, naast slim rekenen, haast belangrijker dan het gewone rekenen dat ik geleerd heb. Wie bijvoorbeeld zoals ik niet meteen ziet dat

$$37 \times 27 = 37 \times 3 \times 9 = 111 \times 9 = 999,$$

de realistische slimme manier, kan de som een beetje veranderen, bijvoorbeeld in $40 \times 25 = 1000$, zoals een slimme collega van me opmerkte. Ietsje meer keer ietsje minder, bijna goed. Op pagina 40 staat een voorbeeldje over hoe je schattend rekent met breuken. 30 gedeeld door 2.37. 2.37 is ongeveer $2\frac{1}{2}$, 4 keer $2\frac{1}{2}$ is 10, dus het antwoord is, via afpassen, ongeveer 3 keer 4 is 12. Even beter kijken *zou* leren dat het antwoord dichter bij 13 ligt. Op dezelfde pagina staat dat 49 bijna 50 is en dus de helft van 100.
Ik constateer dat het standaardiseren, met andere woorden het decimaal beschrijven van de breukgetallen, op het verkeerde moment leidt tot schattend rekenen, waarbij het inderdaad lastige begrip breuk al vertroebeld wordt voor dat het goed en wel aan de orde is gekomen.

Pizza's of meetlatten?

Wat is een breuk überhaupt? In het boekje komen twee modellen voor om dat uit te leggen, waaronder het voor de hand liggende *pizza*-model. De voorkeur krijgt echter het strookmodel met, veel te vroeg, schaalverdelingen, twee nog wel, één aan de boven- en één aan de onderkant. Dit leidt tot een introductie van verhoudingen van vooral *niet-gehele* getallen als het overkoepelende begrip voor breuken, kommagetallen en procenten. Weg is de transparante overgang van verhoudingen naar breuken.
De voorkeur voor het strookmodel heeft twee redenen. De eerste is dat er kennelijk meteen twee schalen nodig zijn, en die passen op de twee kanten van een strook. Ten tweede, en die reden hangt samen met de eerste, omdat de schrijvers in de uitleg eerder voor afpassen dan voor tellen kiezen, en de strook zo vooral een maatlat is. Het gevolg hiervan is een cijfer- en getallenbrij die de breuken en de getallen in die breuken op geen enkele manier in hun waarde laat.
De tijd dat we houten cirkels gebruikten ligt achter ons merken de schrijvers op. Waarom eigenlijk? Het rondjesmodel heeft als geweldig voordeel dat symmetrie helpt bij het inzicht. Tekenend voor de filosofie van de schrijvers lijkt dat die symmetrie eerst via het onhandig in repen snijden van de pizza aan de orde komt en vervolgens nauwelijks wordt uitgebuit. Waarom niet met een paar *echte* pizza's uit leggen dat 5 gedeeld door 30 hetzelfde is als $\frac{5}{30}$ en $\frac{1}{6}$. Dan komen breuken eerst aan de orde met behulp van rondjes die in stukjes verdeeld worden. Daarbij wordt geteld en niet meteen gemeten. Dat delen hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde wordt ook duidelijk: 5 gedeeld door $\frac{1}{6}$ is 30 want 30 keer $\frac{1}{6}$ geeft 5. De schrijvers komen in het hele boekje niet verder dan dat delen het omgekeerde is van vermenigvuldigen. Tenslotte, maak

het kind ook eerst vertrouwd met breuken van *kleine* getallen, met behulp van houten rondjes, opgehakt in bijvoorbeeld 12 gelijke partjes, zodat je *ziet* dat

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}.$$

Het gelijknamig maken van breuken kan heel inzichtelijk worden behandeld. Doe dat dan ook.

Contexten regeren, onderscheid ontbreekt

De voorkeur voor stroken boven rondjes en afpassen boven tellen lijkt bovenal ingegeven door contexten, waarbij fysische eenheden meteen een rol moeten spelen. In Hoofdstuk 3, Kerninzichten verhoudingen, gaat dat op pagina 47 in een fietscontext nog even goed. Gegeven een (meteen maar gemiddelde) snelheid van 15 km per uur wordt behandeld hoeveel tijd het kost om een afstand van 20 km af te leggen. Dat leidt tot een overzichtje van de vorm

km	15	5	20
min	60	20	80

We maken gebruik van het begrip evenredigheid en in twee stapjes, een keer delen door 3, daarna een keer vermenigvuldingen met 4, staat het antwoord er. Maar met verhoudingstabellen van *gehele* getallen is nog veel meer uit te leggen. Haal de eenheden weg, zet streepjes op de juiste plaatsen, en er staan breuken die *vereenvoudigd* kunnen worden,

$$\begin{array}{cccc} 15 & 5 & 20 & 1 \\ - & - & - & - \\ 60 & 20 & 80 & 4 \end{array} \quad \text{of wel} \quad \frac{15}{60} = \frac{5}{20} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}.$$

De 1 en de 4 roepen als het ware om er bij gezet te worden, evenals het totaal genegeerde concept van kruislings vermenigvuldigen. Maar dat zien en horen de schrijvers niet. In het vervolg staan er bij voorkeur kommagetallen in de verhoudingen. Zo het didactisch essentiële verband tussen breuken en verhoudingen van gehele getallen er al was, het verdwijnt meteen weer naar de achtergrond.
Hier wreekt zich wederom het systematische gebrek aan onderscheid tussen gehele en andere getallen. Vanaf de eerste voorbeelden op pagina 14 heeft het decimale perpectief de voorkeur. Eerst komt 2,50 en dan pas $2\frac{1}{2}$. Terwijl het onderwerp bestemd is voor de laatste drie klassen van de lagere school, wordt als eerste context gekozen voor een kleuter die vraagt hoeveel keer een boot groter is dan een auto. Zo'n verhouding is natuurlijk nooit precies geheeltallig en dus moet er meteen geschat worden, het stokpaardje bij uitstek van het realistisch rekenen. Is het nu zo moeilijk om *eerst* een context te vinden die tot gehele getallen leidt? Je kunt een kind toch ook dingen laten ontdekken zonder alles meteen op één hoop te gooien. Nu werkt de gekozen structuur met verhoudingen als overkoepelend begrip niet, simpelweg omdat *in* diezelfde verhoudingen vooral kommagetallen en procenten staan.

Geef ons de gehele getallen terug!

Op pagina 32, als onderdeel van een historisch overzicht waarin het cijfer 0 wel voorkomt maar het *getal* 0 niet, lezen we de volgende zin. *Op een gegeven moment is besloten tot standaardiseren van breuken en verhoudingen om op die manier problemen bij het vergelijken te omzeilen.* De problemen waaraan gerefereerd wordt zijn van de volgende aard. Welke van de twee breuken

$$\frac{2}{3} \text{ en } \frac{4}{5}$$

is groter? Ik zou zeggen, maak eerst allebei 3 keer zo groot en daarna allebei 5 keer zo groot. Omdat 2×5 kleiner is dan 3×4, is de eerste dus de kleinste, klaar. Dat heet nu kruislings vermenigvuldigen. Realistische hulpmiddelen om dat toe te lichten zijn wel te verzinnen. Daarna werkt de methode met *alle* breuken. Dus ook voor

$$\frac{23}{41} \text{ en } \frac{31}{59}$$

om maar wat te noemen. Mooi om te zien hoe zo de getallen in de breuken *in hun waarde* worden gelaten. De rest kan later komen, rente, benzineverbruik, verhoudingen van niet-gehele getallen, in context indien nodig, maar geef ons toch alsjeblieft eerst de onmisbare didactische schoonheid van de gehele getallen en breuken van gehele getallen terug.

Joost Hulshof
Oegstgeest