

2^n en e^t

June 8, 2010

In het artikel over de exittoets algebraïsche vaardigheden bij Wiskunde A komt het differentiëren van 2^x voor. In mijn hele leven als wiskundige heb ik nog nooit de behoefte gehad om dat te doen, en ik verwacht ook niet dat die behoefte nog gaat komen. Wel is met de machten van 2 mijn liefde voor rekenen en wiskunde begonnen, 2, 4, 8, 16, ..., steeds het dubbele aantal rijstkorrels op het volgende vakje van het schaakbord, enzovoorts. Intrigerend lang voordat er zoiets als celbiologie was, en nu juist vanwege de evidente relevantie voor alles dat met het leven te maken heeft HET voorbeeld waarmee je een vak over dynamische verschijnselen in de levenswetenschappen zou kunnen beginnen. Laat zien die rij in al zijn glorie: 2^n met $n \in \mathbb{N}$.

Maar 2^x ? Met $x \in \mathbb{R}$? Moet dat echt nog steeds met die rare en lelijke uitbreiding van 2^n via $2^{\pm \frac{p}{q}}$ met $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ naar 2^x met $x \in \mathbb{R}$? Vanwege halfwaardetijden? Afgezien van de opmerking dat 2^t of liever nog 2^{-t} dan beter klinkt, ligt het dan vanuit het om allerlei redenen natuurlijke perspectief van dynamische modellen niet veel meer voor de hand om meteen de vraag te stellen wat er gebeurt met een grootte X die varieert in de tijd, en wel zo dat op elk moment de toename evenredig is met de waarde op dat moment? Met een evenredigheidsconstante die we eerst maar eens gelijk aan 1 nemen, zodat voor $X(t)$ geldt dat

$$X'(t) = X(t).$$

In

<http://www.math.vu.nl/~jhulshof/echtebrrrrwiskunde.pdf>

heb ik wat gedachten geformuleerd over hoe je zo, met beginwaarde $X(0) = 1$, de functie $\exp(t)$, het getal $e = \exp(1)$ en de (zinvolle) notatie $\exp(t) = e^t$ kunt introduceren. Daarna kan e^{at} langs kan komen, en, als het moet, met de juiste keuze van a ook 2^t . Direct relevant voor elke scholier die later een van de minder harde beta-vakken kiest en die, net als ik, in zijn/haar verder carrière ook nooit de functie 2^x zal willen differentiëren.

Er zijn veel manieren om de exponentiële functie in te voeren. Bijvoorbeeld aansluitend bij de definitie van afgeleide via een benadering met eindige differenties. Dus met

$$X'(t) \approx \frac{X(t+h) - X(t)}{h},$$

waarbij de differentiaalvergelijking wordt vervangen door de differentievergelijking

$$\frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X(t).$$

Herschreven als

$$X(t+h) = X(t) + hX(t) = (1+h)X(t),$$

is dit de voorwaartse methode van Euler voor de differentiaalvergelijking waarmee we begonnen zijn. De benadering hangt natuurlijk van h af, en van de beginwaarde, waarvoor we eerst maar eens $X(0) = 1$ kiezen. Je kunt voor een gegeven t in 3 stapjes van 0 naar t lopen, maar ook in 42 stapjes, door $h = \frac{t}{42}$ te nemen. Beginnend bij $X(0) = 1$ geeft dit met het binomium van Newton

$$\begin{aligned} X_{42}(t) &= (1+h)^{42} = 1 + 42h + \frac{42 \cdot 41}{2}h^2 + \frac{42 \cdot 41 \cdot 40}{3 \cdot 2}h^3 + \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2}h^4 + \dots \\ &= \left(1 + \frac{t}{42}\right)^{42} = 1 + t + \frac{41}{42} \frac{t^2}{2} + \frac{41}{42} \frac{40}{42} \frac{t^3}{3 \cdot 2} + \frac{41}{42} \frac{40}{42} \frac{39}{42} \frac{t^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots, \end{aligned}$$

een som met 43 termen, waarvan ik alleen de eerste paar termen opschrijf, genoeg om de regelmaat te zien als je zo verstandig bent om hier vooral geen ICT te gebruiken. Rekenen met breuken: use to learn en learn to use.

De index 42 hangt eraan om aan te geven dat de benadering van de keuze van het aantal stapjes afhangt. Wat met 42 stapjes kan gaat ook met 9999999999 stapjes (1000000000 termen), doe het maar na en schrijf de eerste paar termen op. Regelmaat moet je leren zien. Elke voorfactor (de breuken met in de noemer $N = 42$) komt van onder steeds dichterbij 1 te liggen als het aantal stapjes N groter wordt genomen. In de limiet zien we

$$1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3 \cdot 2} + \frac{t^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \cdots,$$

(voor Hessel: een som met oneindig veel termen) verschijnen. Geen echt bewijs natuurlijk, maar wel een begin daarvan. Bovendien, dit is precies wat je rekenmachine doet als je op de $\exp$ of e^x knop drukt. Controleer maar of het klopt. Use to learn en learn to use. En kijk daarna hoe het gaat als je het hele verhaal begint met $X'(t) = aX(t)$, met $a \in \mathbb{R}$ vast maar willekeurig gekozen, en of je het verband ziet met rente op rente, bij jaarlijkse, maandelijks, wekelijks, dagelijkse, enzovoort rentebijschrijvingen.