

Alle studenten maken opgaven 1, 2 en 3, totaal 8 onderdelen. Normering: elk onderdeel 2 punten. Cijfer $\frac{2}{3}$ keer het totaal, minimaal 1, maximaal 10.

1. We bekijken de functie f gegeven door $f(z) = (iz + 1)e^{-2z}$.
 - a) Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.
Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.
 - b) Gebruik de vergelijkingen van Cauchy-Riemann om aan te tonen dat f complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$.

2. De complexe functie f is gegeven door $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$.

- a) Wat is de convergentiestraal van de machtreeksontwikkeling van f rond $z = 0$?
- b) Bepaal de machtreeksontwikkeling van f rond $z = 0$.
- c) Bepaal de Laurentreeksontwikkeling van f in machten van $\frac{1}{z}$ voor $|z|$ groot.

3. Gegeven is de complexe functie $f(z) = \frac{1}{z^4+4}$ en voor $R > 2$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

- a) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

- b) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ en laat γ linksom worden doorlopen. Bereken $\int_{\gamma} f(z) dz$.
- c) Bereken met de onderdelen a) en b)

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+4} dx$$