

Van decimale breuken naar machtreeksen

Met een staartdeling ontdek je dat

$$\frac{8}{7} \approx 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 + 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 + 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5 + 7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^6,$$

en je weet ook (hoe eigenlijk?) dat

$$e \approx 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 + 7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 + 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5 + 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^6.$$

In beide benaderingen is de fout op zijn hoogst $1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^6$. Elk positief reëel getal s kan geschreven worden als

$$s = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n, \quad (1)$$

met $-N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zo is s dus (met de terminologie van het college complexe functietheorie) een Laurentreeks in $\frac{1}{10}$, met coëfficiënten

$$a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

overeenkomend met de decimale ontwikkeling

$$s = \underbrace{a_N \dots a_0}_{\in \mathbb{N} \cup \{0\}}, a_1 a_2, a_3, \underbrace{\dots}_{\text{bijdrage} \leq \frac{1}{10^3}}$$

Met $N = 0$ is s dus een getal tussen 0 en 10. Het geval $N = -\infty$ komt hier niet voor.

De tafels van tot 1 tot 10 stellen ons in staat om zulke getallen op te tellen en te vermenigvuldigen, waarbij er meestal doorgeschoven moet worden (denk aan $3+9=12$, 2 opschrijven, 1 onthouden) van rechts naar links. Een leuke variant is rekenen met getallen in deze vorm waarbij $a_n \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, minder tafels, maar veel gehannes met plussen en minnen. Elk met stappen van 1 oplopend rijtje van 10 getallen waar 0 bijzit is te gebruiken. In al deze gevallen zie je aan de ontwikkeling (1) meteen hoe groot de fout maximaal kan zijn als je afkapt¹. De foutafschatting hangt alleen maar af van hoe ver je gaat in de ontwikkeling en is *uniform* in de keuze van de decimalen. Bovendien, als we $\frac{1}{10}$ vervangen door de kleinere breuk $\frac{1}{11}$, dan definieert, met dezelfde a -tjes, de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^n \quad (2)$$

weer een (ander) getal dat door

$$\sum_{n=0}^3 a_n \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^n \quad (3)$$

benaderd wordt met een fout die weer op zijn hoogst $\frac{1}{10^3}$ is, of we nu

$$a_n \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

of

$$a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

nemen. Met elke $0 \leq x \leq \frac{1}{10}$ is

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (4)$$

waarin we de vermenigvuldigingspunt $\cdot$ nu weglaten, goedgedefinieerd. In de benadering

$$s \approx \sum_{n=0}^3 a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (5)$$

¹Dat is iets anders dan afronden.

is de fout nog steeds op zijn hoogst $\frac{1}{10^3}$, *uniform* in $0 \leq x \leq \frac{1}{10}$, want het verst dat linker- en rechterlid van elkaar af kunnen liggen is

$$0.00099999 \dots = 9 \cdot \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10^4}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^3}. \quad (6)$$

Dat is ook zo als we $-\frac{1}{10} \leq x \leq \frac{1}{10}$ nemen. Vervangen we $\frac{1}{10}$ door een $0 < r < 1$, en nemen we voor a_n een rij getallen die begrensd is door M , dus

$$|a_n| \leq M, \quad -r \leq x \leq r, \quad 0 < r < 1, \quad (7)$$

dan volgt voor

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (8)$$

dat het $\approx$ teken in

$$s \approx s_3 = \sum_{n=0}^3 a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (9)$$

precies gemaakt wordt door de afchatting

$$|s_3 - s| \leq M \frac{r^4}{1 - r}. \quad (10)$$

Algemener geldt

$$s \approx s_m = \sum_{n=0}^m a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad \text{met} \quad |s_m - s| \leq M \frac{r^{m+1}}{1 - r} \rightarrow 0 \quad (11)$$

als $m \rightarrow \infty$.

Hierboven hebben we het bestaan van de som van de machtreeks in (8) onder de aanname (7) als net zo vanzelfsprekend gepresenteerd als het bestaan van (1). De manier om dat precies te maken is natuurlijk het criterium van Cauchy. Kijk naar het verschil van s_m en s_l , waarbij $m < l$. Met de driehoeksongelijkheid volgt

$$|s_l - s_m| = \left| \sum_{n=m+1}^l a_n x^n \right| \leq \sum_{n=m+1}^l |a_n x^n| \leq \sum_{n=m+1}^l M r^n \leq \frac{M r^{m+1}}{1 - r} \rightarrow 0 \quad (12)$$

als $m \rightarrow \infty$, met een afchatting die *uniform* is in x als $|x| \leq r < 1$. Bijgevolg is s_n voor elke $|x| \leq r < 1$ een Cauchyrij. Zo bestaat s in (8) met ook weer de uniforme afchatting in (11), door in (12) de limiet $l \rightarrow \infty$ te nemen. Een machtreeks met begrensde coëfficiënten is daarom uniform convergent op elke $\{x : |x| \leq r\}$ met $0 < r < 1$.

Opgave Als de coëfficiënten voldoen aan

$$|a_n| R^n \leq M$$

dan is de machtreeks uniform convergent op elke

$$\{x : |x| \leq r\}$$

met $0 < r < R$. Hint: vervang in de redeneringen hierboven x door $\frac{x}{R}$.

Wat hebben we gebruikt? Hierboven waren a_n steeds gegeven reële getallen en was x een reële variabele. De eigenschappen van de absolute waarde waren essentieel, met name

$$|ax^n| = |a| \cdot |x^n|, \quad |x^n| = |x|^n \quad \text{en} \quad |x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|, \quad (13)$$

en daarnaast het convergent zijn van Cauchyrijen. Dat van die Cauchy rijen die convergent zijn is *moderne* wiskunde. Cauchy verzond deze definitie als alternatief voor de standaard definitie waarin

je de limiet van de rij s_n al moet weten om de definitie van convergentie te verifiëren, en dus bedacht hij

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |s_n - s_m| \leq \epsilon \quad (\text{oftewel } s_n - s_m \rightarrow 0 \text{ als } m, n \rightarrow \infty).$$

Vervolgens vond hij het vanzelfsprekend dat de rij s_n dan een limiet had, net zoals wij het vanzelfsprekend vinden dat een doorlopende decimale ontwikkeling een getal definieert. Voor een wiskundige van nu zijn beide vanzelfsprekendheden dat dus niet, maar daar hoeven we niet-wiskundigen niet mee lastig te vallen.

Het belang van precieze foutschattingen, zoals hierboven gebruikt reikt veel verder. Alles werkt bijvoorbeeld net zo goed met $a_n \in \mathbb{C}$ en met $x = z$ een complexe variabele. Sterker nog, met $\leq$ i.p.v. = in de eigenschappen in (13) werken alle argumenten ook. Als je bijvoorbeeld al gezien hebt wat matrixnormen zijn, dan kun je i.p.v. x ook een vierkante reële of complexe matrix A nemen. Zo krijgt

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots,$$

waarin I de identiteitsmatrix is, en $A^2 = AA$, $A^3 = AAA, \dots$ (matrixproduct) ook betekenis. Dat is handig voor het oplossen van vectorwaardige differentiaalvergelijkingen als

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t).$$

Als we de Euclidische norm van een vector x ook weer als $|x|$ schrijven, dan is de meest voor de hand liggende matrixnorm

$$|A| = \max\{|Ax| : |x| \leq 1\}.$$

Voor $|A| < 1$ geldt dan ook bijvoorbeeld dat

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots,$$

een meetkundige reeks voor de inverse matrix van $I - A$.

Op dit niveau van abstractie is het belangrijk om een wiskundige basis te hebben waarop de theorie gefundeerd kan worden, en daarbij is het begrip Cauchyrij onontbeerlijk. De aanname dat Cauchyrijen convergent zijn is vervolgens een hypothese die nodig is voor bijna alle stellingen in deze context. Verificatie van de hypothese is soms lastig, nog niet in de context van eindige matrices, maar wel in de oneindigdimensionale setting die in de praktijk ontstaat bij ondermeer de studie van differentiaalvergelijkingen.

De mogelijkheid om in

$$x \rightarrow e^x \quad \text{en} \quad x \rightarrow \frac{1}{1-x}$$

x te vervangen door A , met op die manier ook een reeks voor $(z - A)^{-1}$ die het “doet” als $|A| < |z|$, brengt ook de Cauchy integraalformule in beeld met $f(A)$ i.p.v. $f(x)$ en $f(z)$.

Terug naar gewone machtreeksen: de convergentie straal. De aanname

$$|a_n|R^n \leq M \tag{14}$$

is voldoende voor convergentie van het rechterlid in

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

waarbij de convergentie *uniform* is op elke disk

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

met $r < R$. Heb je zo'n R te pakken dan gaat het voor $|z| < R$ goed, in het bijzonder bestaat $f(z)$ en kunnen we met $f(z)$ rekenen bijna alsof het een polynoom is. De n -de orde benadering

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

is typografisch eigenlijk lastiger dan de machtreeks zelf, als je die met puntjes uitschrijft,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \quad (15)$$

wat we in de sommen meestal doen.

Als de machtreeks niet voor alle $z \in \mathbb{C}$ convergent is, dan is er een grootste R , de zogenaamde *convergentiestraal*, waarbinnen alles goed gaat. Het is in het algemeen *niet* zo dat er voor deze R ook een M is waarvoor de schatting in (14) geldt (waarom niet?). Om een uitdrukking voor de convergentiestraal R te krijgen merken we op dat alle conclusies hierboven ook geldig zijn als (14) geldt vanaf zekere $n = N$, hetgeen equivalent is met

$$\sup_{n \geq N} |a_n| R^n \leq M \quad \text{ofwel} \quad \sup_{n \geq N} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{M^{\frac{1}{n}}}{R}.$$

Hierin staat $\sup$ voor kleinste bovengrens. De convergentiestraal van de machtreeks wordt nu gegeven door

$$\frac{1}{R} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Dit is een stelling die in het boek helaas niet geformuleerd wordt. Bij Calculus heb je vast ook de formules

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad \text{en} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

op hun kop gezien. Als een van deze limieten bestaat (inclusief de randgevallen 0 en ∞) dan is de aldus impliciet gedefinieerde R de convergentiestraal, waarbij $\frac{1}{0} = \infty$ en $\frac{1}{\infty} = 0$.

Een andere stelling die helaas ontbreekt is dat als (15) bestaat (i.e. de machtreeks is convergent) in een $z_0 \in \mathbb{C}$, dat de machtreeks dan ook convergent is (uniform zelfs) op het lijnstuk

$$\{z = tz_0 : 0 \leq t \leq 1\}.$$

In wikipedia vind je dit als *Abel's theorem on power series*, met een fraai bewijs waarin *partieel gesommeerd* wordt.