

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Complexe Functietheorie Deel 1
Afdeling Wiskunde	23-10-2009
Vrije Universiteit	12.00 - 14.00 uur

Alle studenten maken opgaven 1, 2 en 3, totaal 8+1 onderdelen. Normering: elk onderdeel 2 punten. Cijfer $\frac{2}{3}$ keer het totaal, minimaal 1, maximaal 10.

1. We bekijken de functie f gegeven door $f(z) = (z + i)e^z$.
 - a) Stel $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.
Schrijf $f(z)$ in de vorm $u(x, y) + iv(x, y)$ met u en v reële functies.
 - b) Toon aan, m.b.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dat f complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$.

2. De complexe functie f is gegeven door $f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}$.
 - a) Bepaal de eerste drie termen van de machtreeksontwikkeling van f in machten van z rond $z = 0$. Wat is de convergentiestraal R van deze machtreeks? Hint: in welke punten $z \in \mathbb{C}$ is $f(z)$ niet gedefinieerd?
 - b) (Bonusopgave.) Bepaal de hele machtreeks.
 - c) Laat C de cirkel $|z| = 2$ zijn die linksom wordt doorlopen. Bepaal $\int_C f(z) dz$.
 - d) Bepaal de eerste drie termen van de Laurentreeksontwikkeling van f in machten van $\frac{1}{z}$ voor z groot. Hint: substitueer eventueel $z = \frac{1}{w}$. Buiten welke cirkel $|z| = \rho$ is deze reeks convergent?

3. Gegeven is de complexe functie $f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 4}$ en voor $R > 2$ de krommen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z \in \mathbb{C} : -R \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

- a) Kies een oriëntatie van γ_2 en laat met een afchatting zien dat

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

- b) Laat $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ en laat γ linksom worden doorlopen.
Bereken $\int_{\gamma} f(z) dz$.
- c) Bereken met de onderdelen a) en b)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 4} dx$$