Complexe Functie Theorie Deel 1 en Deel 2 (Wiskunde 400386) , Complexe Functies (Natuurkunde 401019), studiewijzer

Complexe Functie Theorie Deel 1(Wiskunde 400386) en Complexe Functies (Natuurkunde 401019) vallen samen.
Voor Complexe Functie Theorie Deel 2(Wiskunde 400386), zie Sectie 4.
College: maandag (M369), dinsdag (S607): 13.30-15.15 (eerste 7 weken).
Werkollege: vrijdag (M607): 9.00-10.45 (eerste 7 weken).
Tentamen: 29-10-2010, 12:00-14:00.
Boek: Complex Variables and Applications, Churchill & Brown, 8^{th} edition.

LEES EERST de samenvatting van het vak (wat, waarom, hoe, etc.) hieronder. Lees daarnaast ook de stof per week van te voren, aan de hand van de leesgids. Op het college behandel ik hoofdpunten aan de hand van de indeling hier direct onder, de paragraafnummers refereren naar het boek. Ik zal het boek zeker niet pagina voor pagina volgen. Op het overzicht van 2 jaar terug staat een sommenkeuze die ik wel wat zal aanpassen terwijl de cursus loopt.

1 Programma Deel 1 per week

Week 1 §1-18:
Herhaling $\mathbb{C}$, introductie van complexe functies $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ook meerwaardig.
Speciale aandacht voor:

- $w = f(z) = z^n$, beschrijving met $w = u + iv$, $z = x + iy = re^{i\theta}$
- limieten en continuiteit
- ∞
- $z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} + \cdots + z_2^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, dus $(z^n)' =..?$
- meetkundige reeks en $\frac{1}{1-z}$.
- $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2+1}$
- integralen complex, voorbeeld
- de complexe exp, meerwaardige functies: log, $\log z = \log r + i\theta$, $\sqrt[n]{z}$

Week 2 §19-26, §29-36:
Complex differentiëren, verband met $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, harmonische functies.

- complex differentiëren met limiet differentiequotient, z^n, $\bar{z}$, $|z|^2$
- Cauchy-Riemann vergelijkingen, z^n, $\bar{z}$, $\exp(z)$
- $\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$ en $\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$
- harmonische functies
- lineaire functies $f(z) = \alpha z$, verband met lineaire $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- lineaire benaderingen[1], product- en kettingregel
- $\log z$, Cauchy-Riemann vergelijkingen als $ru_r = v_\theta$, $-u_\theta = rv_r$
- inverse functies: log, arcsin etc.
- reguliere punten van f

Week 3 §37-47:
Lijnintegralen, primitieven, afschattingen. Kringintegralen zijn vaak 0.

- $t \to w(t) = u(t) + iv(t)$, $\int_a^b w(t)dt$ voor continue $w(t)$
- $|\int_a^b w(t)dt| \leq \int_a^b |w(t)|dt$
- $\int_\alpha^\beta w(t)dt$ uitrekenen met primitieve $W(t)$
- $t \to z(t) = x(t) + iy(t)$ als parametrisatie ($a \leq t \leq b$) van kromme C
- lijnintegraal als $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$
- lijnintegraal $\int_C f'(z)dz = \int_a^b f(z'(t))\, z'(t)\, dt = f(z(b)) - f(z(a))$
- snelle afschatting $|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)|\,|dz|$
- $|\int_C f(z)dz| \leq$ lengte van C keer maximum van $|f(z)|$ op C
- $\int_C f(z)dz = \int_C udx - \int_C vdy + i(\int_C vdx + \int_C udy)$
- Cauchy: via Green's formule $\oint_C f(z)dz = 0$ als f op en binnen C regulier.

Week 4 §48-53:
Belangrijke kringintegralen waar geen 0 uitkomt.

- Cauchy: via Green's formule $\oint_C f(z)dz = 0$ als f op en binnen C regulier.
- uit Cauchy: Cauchy integraalformule (CIF) in regulier punt
- uit CIF: middelwaardeeigenschappen en Hoofdstelling algebra
- uit Cauchy: CIF voor f' in regulier punt
- uit CIF voor f': f overal regulier en begrensd $\quad\Rightarrow\quad$ f constant

[1]niet in boek

Week 5 §55-62, §68-69, §72-77:
Complexe functies als sommen van pure machten (ook negatieve).

- uit CIF: Taylorreeks rond regulier punt, ook voor de afgeleide(n)
- Omkering van Cauchy: Morera's stelling
- convergentiestraal als afstand tot dichtsbijzijnde singulariteit
- uit CIF: Laurentreeks rond geisoleerd singulier punt
- uit reeks: classificatie (reguliere) nulpunten en geisoleerde singulariteiten

Week 6 §70-71, §78-85:
Integralen zonder primitiveren, ook gewone reële integralen en Fouriertrafo's.

- gesloten kromme C linksom doorlopen:
- residustelling: $\oint_C f(z)dz = 2\pi i$ keer (eindige) som residuen binnen C
- gewone integralen met residustelling

Week 7: Uitloop en keuze uit Chapters 9-10 over
Methoden en fysische toepassingen voor harmonische functies.

2 Samenvatting Deel 1

Dit is een basiscursus voor wiskunde en natuurkunde studenten over calculus (differentiaal- en integraalrekening) voor functies $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Deel 2 van dit vak behoort alleen bij wiskunde tot het vaste curriculum en wordt gedeeltelijk gegeven uit het klassieke boek van Conway, Functions of One Complex Variable[2]. Doel van deel 1 is het leren werken met en begrijpen van de basistechnieken voor complexe functies, waarbij we werken in de complexe getallenverzameling $\mathbb{C}$, die we met het platte vlak $\mathbb{R}^2$ identificeren via

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \leftrightarrow \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

De x-as in dit complexe vlak komt overeen met $\mathbb{R}$ en wordt daarom de *reëele as* genoemd. **De basisbegrippen van complexe getallen, waaronder het complexe vlak, vormen het bekend verondersteld onderwerp van Hoofdstuk 1.**

Een alternatieve naam voor dit vak zou zijn: **integraalrekening zonder primitiveren met behulp van differentiaalrekening voor complexe functies.** We maken gebruik van het feit dat veel vertrouwde functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ook te zien zijn als[3] complex differentieerbare functies[4] $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Complex differentieerbaar in z_o betekent per definitie dat

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \text{ bestaat.}$$

[2] Ik gebruik zelf de 2-de editie uit 1978. Mooi boek.
[3] Zonder verdere keuzevrijheid, ze maken zichzelf als het ware.
[4] Niet altijd op heel $\mathbb{C}$, maar wel op een substantieel deel van $\mathbb{C}$.

De beginselen van complexe differentiaalrekening zijn te vinden in Hoofdstuk 2. Hoe je aan de partiële afgeleiden naar x en naar y van het reële en imaginaire deel van $f(z)$ kunt zien of $f'(z_o)$ bestaat, en ook hoe je er mee werkt en rekent alsof het niet uitmaakt dat er een z in plaats van een x staat.

Als f complex differentieerbaar is in een omgeving van z_o, dan heet z_o een *regulier punt* van f en f *analytisch* in z_o. We noemen z_o een (eventueel ophefbare[5]) singulariteit van f als er willekeurig dichtbij z_o reguliere punten van f liggen. Als z_o geen regulier punt is van f en ook geen singulariteit van f, dan is z_o dus helemaal niets van f en verder niet relevant als we het over f hebben[6].

Als f complex differentieerbaar is in een omgeving van z_o *behalve* in z_o zelf, dan heet z_o een *geisoleerde singulariteit* van f. Het zijn juiste deze geisoleerde singulariteiten die de interessante informatie bevatten, de punten[7] waar we, zonder dat er met $f(z)$ gekke dingen gebeuren, z *wel omheen maar niet doorheen* kunnen laten lopen, meestal omdat we dan zouden delen door nul. **Als we zeggen dat z_o een regulier punt of een geisoleerde singulariteit is van f, dan zeggen we impliciet dat f, behalve eventueel in z_o zelf, in de buurt van z_o gedefinieerd en complex differentieerbaar is!**

Bij

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

zijn alle punten $z \in \mathbb{C}$ regulier behalve de punten $z = -i$ en $z = i$, de geisoleerde singulariteiten van f. Deze functie kunnen we in de buurt van $z = i$ herschrijven[8] als

$$\frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z+i}\,\frac{1}{z-i} = \frac{1}{2i+(z-i)}\,\frac{1}{z-i} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}\,\frac{1}{z-i} =$$

$$\frac{1}{2i}\left(1 - \frac{z-i}{2i} + \left(\frac{z-i}{2i}\right)^2 - \left(\frac{z-i}{2i}\right)^3 + \cdots\right)\frac{1}{z-i}$$

$$= -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z-i) + \frac{1}{16}(z-i)^2 + \cdots,$$

waarbij we in de vierde stap een meetkundige reeks[9] hebben gebruikt. We zullen zien dat **in de buurt[10] van een geisoleerde singulariteit $z = z_o$ altijd geldt dat[11]**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_o)^n, \tag{F1}$$

en dat we met deze som in feite mogen rekenen alsof het een gewone eindige som betreft[12]. We zullen heel vaak alleen a_{-1} hoeven uit te rekenen omdat deze coëfficiënt[13] de relevante informatie voor het integreren bevat.

[5]Flauw voorbeeld: $z = 0$ is ophefbaar voor $f(z) = \frac{z}{z}$.
[6]Een punt is regulier, singulier of niks.
[7]Andere singulariteiten komen ook aan de orde.
[8]Reken mee.
[9]Met welke rede?
[10]i.e. voor $0 < |z - z_o| < R$ en zekere $R > 0$.
[11]Dit heet een Laurentreeks.
[12]Term voor term differentiëren en integreren bijvoorbeeld.
[13]Het residu van $f(z)$ in $z = z_o$.

Soms blijkt dat alle negatieve machten als coëfficient $a_n = 0$ hebben[14]. Dan heet de (geisoleerde) singulariteit *ophefbaar*[15] . Ook als z_o een regulier punt is dan is, in de buurt van z_o,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n. \tag{F2}$$

Als oneindig veel negatieve machten in (F1) een coëfficient a_n ongelijk aan 0 hebben, dan heet de singulariteit *essentieel* en is het gedrag van f in de buurt van z_o met geen pen te beschrijven. Zijn echter in een niet-ophefbare singulariteit slechts eindig veel coëfficienten van negatieve machten ongelijk nul[16], dan kun je de grootste negatieve macht[17] naar buiten halen, waarna een tamelijk onschuldige machtreeks overblijft die begint met een constante ongelijk nul. In het voorbeeld:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i}\left(-\frac{i}{2} + \frac{1}{4}(z-i) + \frac{i}{8}(z-i)^2 + \frac{1}{16}(z-i)^3 + \cdots\right),$$

geldig voor $0 < |z - i| < 1$.

Alle functies die we maken met quotiënten van polynomen[18] hebben alleen reguliere punten en geisoleerde singulariteiten[19], eindig veel slechts[20]. Soms heeft zo'n functie in zijn reële vorm een primitieve functie[21] [22]. Voor ons voorbeeld,

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ met primitieve functie } F(x) = \arctan x,$$

volgt, met de hoofdstellingen van de integraalrekening, dat

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \arctan b - \arctan a.$$

Deze gewone reële integraal, waarin x van $a \in \mathbb{R}$ naar $b \in \mathbb{R}$ loopt over de *reëele as* , is gelijk aan het verschil van de arctangenswaarden in het eindpunt en het beginpunt. In het limietgeval $a = -\infty$ en $b = \infty$ vinden we ook de *oneigenlijke integraal*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi, \tag{F3}$$

de *eindige oppervlakte* van het *onbegrensde gebied* ingeklemd tussen de *grafiek*

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

en de x-as in het (x, y)-vlak[23].

[14] Dan spreken we van een *Taylorreeks*

[15] Flauw voorbeeld: $z = 0$ is ophefbaar voor $f(z) = \frac{z}{z}$.

[16] Zo'n singulariteit heet een pool.

[17] i.e. $(z - z_o)^n$ als n de eerste n is met $a_n \neq 0$, kun je ook doen als z_o ophefbaar is.

[18] De zogenaamde rationale functies

[19] Alleen polen

[20] Alle punten doen mee als we naar f kijken.

[21] Engels: anti-derivative.

[22] Ook $f(x) = \frac{1}{x}$, met primitieve functie $F(x) = \ln|x|$, kijk echter uit bij $x = 0$.

[23] Dit is *niet* het (x, y)-vlak dat we voor de beschrijving van $\mathbb{C}$ gebruiken!!

In de uitkomst π is de primitieve functie F volledig uit beeld verdwenen. Na alle frustraties bij calculus, waar we gemerkt hebben dat primitieve functies meestal niet voorhanden zijn, of slechts heel moeilijk te vinden, ligt de vraag voor de hand of (F3) ook zonder primitiveren kan worden bereikt. Merk ook op dat (F3) een speciaal geval is van de Fourier integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp} \frac{1}{x^2+1}\, dx, \tag{F4}$$

waarin p de Fourier variabele is. Fourier transformaties zijn belangrijk, niet alleen in toepassingen, maar primitiveren is min of meer kansloos in (F4).

De complexe e-macht in (F4) is voorlopig alleen nog gedefinieerd voor puur imaginaire exponenten,

$$e^{it} = \exp(it) = \cos t + i \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{F5}$$

met als rechtvaardiging dat dit in $t = 0$ gelijk aan 1 is, en dat bij differentiëren naar t een factor i naar voren komt. Met (F5) draaien we de eenheidscirkel $|z| = 1$ in het complexe vlak rond. Algemener:

$$t \to z_o + \rho \exp(it) \text{ met } 0 \leq t < 2\pi \text{ parametrizeert de cirkel } C_{z_o,\rho} \text{ linksom.}$$

De nieuwe techniek in dit vak om zonder primitiveren integralen als (F3) uit te rekenen begint met de observatie dat we in $\mathbb{C}$ *op veel meer manieren van a naar b kunnen lopen.* **Maakt het wat uit voor de integraal**

$$\int_a^b \frac{1}{z^2+1}\, dz,$$

als we z nu eens niet over de reële as van a naar b laten lopen? Bijvoorbeeld over een cirkelboog, aangenomen tenminste dat die boog niet door de *singulariteiten* $z = i$ en $z = -i$ gaat[24]. **De formulering van deze vraag en het antwoord komen aan de orde in Hoofdstuk 4.** De definitie van de integraal over andere paden van a naar b ligt na vectorcalculus voor de hand als we zo'n cirkelboog beschrijven met een parametrisatie

$$t \to z(t) = x(t) + iy(t),$$

waarbij t een gewoon interval[25] doorloopt, zeg $[\alpha, \beta]$.

Voor iedere netjes geparametriseerde [26] boog[27] C luidt de definitie

$$\int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)\, dt, \tag{F6}$$

met[28]

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

[24]Waar $f(z)$ wegens delen door nul niet is gedefinieerd.
[25]Niet persé $[a, b]$ zelf natuurlijk.
[26]Net zo netjes als bij vectorcalculus.
[27]Niet persé een cirkelboog, ook wel: kromme. In het boek: arc, contour.
[28]Wat anders?

In het bijzondere geval

$$a = \alpha,\, b = \beta,\, z(t) = t: \qquad \int_C f(z)dz = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx;$$

hebben we de gewone integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$ terug. Zijn beginpunt a en eindpunt b van C hetzelfde, dan heet C een gesloten kromme, en aangezien $\int_a^a f(x)dx$ altijd nul is, is de vraag hierboven dus ook: **is voor gesloten krommen C de lijnintegraal $\int_C f(z)dz$ nul?**

Als $f(z)$ de complexe afgeleide van een complex differentieerbare $F(z)$ is, dan volgt bijna net zo als bij calculus dat de integraal wordt uitgerekend als

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Voor de eenvoudige functies $z \to (z - z_o)^n$, met $n \geq 0$ geheel, is de integraal over een gesloten kromme zo altijd 0 als we eenmaal weten dat voor dit soort functies complex differentiëren[29] hetzelfde gaat als met reële functies $x \to (x - x_0)^n$. En ook voor negatieve machten gaat het goed, als we maar niet door $z = z_o$ lopen, en n ongelijk is aan -1. Alleen voor $n = -1$ gaat het anders. Een linksom doorlopen cirkel $C_{z_o,\rho}$ met middelpunt z_o en straal $\rho > 0$ geeft, met de parametrisatie[30] $z(t) = z_o + \rho\exp(it)$, dat

$$\oint_{C_{z_o,\rho}} \frac{1}{z - z_o}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho\exp(it)}\,i\rho\exp(it)\,dt = 2\pi i, \tag{F7}$$

wat $\rho > 0$ ook is. Schrijf zelf uit waarom

$$\oint_{C_{z_o,\rho}} (z - z_o)^n\,dz = 0 \text{ als } n \text{ geheel is en } n \neq -1.$$

Alle termen in het rechterlid van

$$\frac{1}{z^2+1} = -\frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z-i) + \frac{1}{16}(z-i)^2 + \cdots, \tag{F8}$$

geven dus nul bij integratie over een cirkel $C_{i,\rho}$ met parametrisatie $z(t) = i + \rho\exp(it)$ rond $z = i$, behalve de term met $z - i$ in de noemer: die geeft $-\frac{i}{2}$ keer $2\pi i$. Voor $\rho < 1$ is (F8) geldig op $C_{i,\rho}$ en mogen[31] integraal en som worden verwisseld, zodat

$$\oint_{C_{i,\rho}} \frac{1}{z^2+1}\,dz = -\frac{i}{2}\oint_{C_{i,\rho}} \frac{1}{z-i}\,dz = -\frac{i}{2}2\pi i = \pi.$$

Hierin is $-\frac{i}{2}$ het residu van de functie in $z = i$, zoals aangekondigd bij (F1). De uitspraak om te onthouden is de **residustelling: de integraal van $f(z)$ over een linksom doorlopen gesloten kromme is gelijk aan $2\pi i$ maal de som van de residuen in het binnengebied.**

We zullen dus ook zien dat de uitkomst niet verandert als we $C_{i,\rho}$ vervormen, zolang we maar wegblijven van $z = i$ en $z = -i$. Ook de integraal over de

[29] En dus ook complex primitiveren

[30] Waarbij t loopt van 0 tot 2π.

[31] Term voor term opereren zal gerechtvaardigd blijken.

gesloten kromme die bestaat uit het lijnstuk van $z = -R$ naar $z = R$, gevolgd door de integraal over halve cirkelboog γ_R in het bovenhalfvlak terug naar $z = -R$, is gelijk aan π. In formules:

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2+1}\,dz = \pi. \tag{F9}$$

Let op de orientatie die hier gekozen wordt. We lopen met z over het reële lijnstuk[32] $[-R, R]$ van links naar rechts en dan bovenlangs in het complexe vlak linksom over de cirkel(boog) $|z| = R$ weer terug. De totale kromme wordt zo linksom doorlopen en heeft in zijn binnengebied alleen een singulariteit in $z = i$.

De eerste integraal in (F9) is, afgezien van de nog te nemen limiet $R \to \infty$, de integraal waar het om begonnen was. In de tweede integraal lopen we met z over een cirkelboog met (boog)lengte πR. De π doet er nu niet toe, het gaat om de ordegrootte R. Op de cirkelboog is de integrand, omdat de term z^2 in de noemer domineert, in absolute waarde van orde $1/R^2$, want op de boog is $|z| = R$. De tweede integraal ziet er dus uit als een term van orde $1/R$, waardoor de bijdrage in de limiet $R \to \infty$ verdwijnt. De manier om dit precies te maken is met de definitie van $\int_C f(z)dz$ in (F6) en

$$|\int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt| \leq \int_\alpha^\beta |f(z(t))\,z'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt, \tag{F10}$$

waarin de laatste term een integraal naar booglengte is, omdat

$$|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Men schrijft ook wel $|dz| = |z'(t)|\,dt$ en met deze notatie is

$$|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)|\,|dz| \leq \max_{z\in C} |f(z)|\,l_C, \tag{F11}$$

waarin l_C de lengte is van C. Het maximum hooeft nooit uitgerekend te worden. Afschatten is voldoende, in het voorbeeld

$$|\frac{1}{z^2+1}| \leq \frac{1}{|\,|z|^2-1|} = \frac{1}{R^2-1} \text{ als } |z| = R > 1,$$

let op de behandeling van de noemer. Het product met $l_C = \pi R$ dwingt de tweede integraal nu naar 0.

Na het zo precies maken van de redenering voor de tweede integraal in (F9) volgt[33] de uitspraak in (F3). **We hebben de integraal nu uitgerekend in termen van het residu van de functie in zijn singulariteit in het bovenhalfvlak, zonder primitiveren.** In dit voorbeeld, dat in een notedop beschrijft waar het in dit vak omgaat, zijn de antwoorden op de vragen hiermee wel gegeven. Is het altijd zo makkelijk?

Het antwoord is ja, maar er moeten wel een aantal zalen precies gemaakt worden en bewezen. Dat doen we vooral in deel 2 van dit vak. In deel 1 *laten we wel zien waarom het antwoord ja is.* Wat we ten eerste zeker willen weten is dat de rekenpartij hierboven met (F8) veel algemener werkt, dus dat een (uniek

[32] Vandaar de x in de eerste integraal.

[33] Wel nog even nadenken over het tegelijk nemen van de limiet in de grenzen.

bepaalde) beschrijving in de buurt van een geisoleerde singulariteit in de vorm (F1) altijd mogelijk is. Dit zal een gevolg blijken van het eerst antwoord dat we nu geven. **De stelling van Cauchy-Goursat zegt dat de integraal over een gesloten kromme**[34] **van een (complex differentieerbare) functie nul is als alle punten op de kromme en in het binnengebied van de kromme reguliere punten van de functie zijn.** Hiertoe leunen we zwaar op Vectorcalculus[35]:

Als we $f(z)$ schrijven als[36]

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

waarin $u(x, y)$ en $v(x, y)$ zelf reëel zijn[37], dan is, in de notatie van vectorcalculus,

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - \int_C vdy + i(\int_C vdx + \int_C udy), \tag{F12}$$

te onthouden via

$$f = u + iv \text{ en } dz = dx + idy.$$

Bij vectorcalculus hebben we al gezien dat een bepaalde type[38] lijnintegralen inderdaad alleen van begin- en eindpunt afhangen. Omdat de lijnintegraal over een gesloten[39] kromme C in $\mathbb{R}^2$ met de Stelling van Green omgeschreven kan worden naar een dubbele integraal over het *binnengebied* A van C, geldt voor de integralen in (F12) dat

$$\oint_C udx - \oint_C vdy = \iint_A (-u_y - v_x)\, dxdy;$$

$$\oint_C vdx + \int_C udy = \iint_A (-v_y + u_x)\, dxdy.$$

Slordig gezegd volgt hieruit dat **voor een gesloten kromme C geldt dat**

$$\oint_C f(z)dz = 0 \textbf{ als } u_x - v_y = u_y + v_x = 0 \textbf{ binnen } C,$$

en, als twee niet gesloten krommen C en γ hetzelfde begin- en eindpunt hebben, dat

$$\int_C f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz \textbf{ als } u_x - v_y = u_y + v_x = 0 \textbf{ tussen } C \text{ en } \gamma.$$

De vergelijkingen

$$u_x - v_y = u_y + v_x = 0 \tag{F13}$$

heten **de vergelijkingen van Cauchy-Riemann. Ze komen in Hoofdstuk 2 van het boek naar voren als voorwaarde voor het complex differentieerbaar zijn van $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.** Omdat in de formules van Green de partiële afgeleiden van u en v continu moeten zijn, is het argument

[34] Ook wel: een kring.

[35] Een vak waar we ook vrijwel niets echt bewezen hebben...

[36] Invullen van $z = x + iy$ is makkelijk, de splitsing $u + iv$ vinden is vervelender.

[37] Waarbij we het expliciet vinden van u en v graag vermijden trouwens.

[38] Verrichte arbeid door een conservatief krachtveld op een bewegende puntmassa.

[39] Zo'n *kringintegraal* wordt meestal genoteerd als $\oint$ i.p.v. $\int$.

hierboven alleen geldig voor complex differentieerbare functies f waarvan de afgeleide f' continu is[40]. Goursat gaf later een fraaier rechtstreeks bewijs zonder Green's stellingen waaruit bleek dat deze extra eis op de afgeleide niet nodig is. **Op grond van deze stelling verandert de kringintegraal $\oint_C f(z)dz$ niet als we de kromme C vervormen, zolang we met C alleen maar door reguliere punten van f gaan.**

In het bijzonder kunnen we het vervorm-argument toepassen op de integralen

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz, \text{ en } \oint_C \frac{f(z_o)}{z-z_o}\,dz,$$

waarbij we de kring C (links)om z_o heen laten lopen en vervormen naar een cirkel met steeds kleinere straal. De tweede integraal is, net als hierboven in (F7), gelijk aan $2\pi i f(z_o)$. *Zonder de stelling van Cauchy-Goursat als voorkennis* blijkt, na uitschrijven en afschatten, dat het verschil tussen beide integralen naar nul gaat, als de straal van de cirkel C om z_o naar nul gaat. *Met de informatie van Cauchy-Goursat* weten we dat ook de eerste integraal niet verandert bij deformatie. De conclusie is **Cauchy's integraalformule**

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz, \tag{F14}$$

die $f(z_o)$ definieert in termen van de waarden van $f(z)$ op een kring rond z_o. In het bijzonder volgt, met $C = C_{z_o,\rho}$, dat

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_o + e^{it})dt, \tag{F15}$$

het gemiddelde van $f(z)$ op $C = C_{z_o,\rho}$, en ook, met (F11), dat de absolute waarde $|f(z_o)|$ op zijn hoogst gelijk is aan het gemiddelde $|f(z)|$ op de cirkel $C_{z_o,\rho}$:

$$|f(z_o)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_o + e^{it})|dt, \tag{F16}$$

waaruit blijkt[41] dat, als alle punten in $\mathbb{C}$ reguliere punten zijn van f, $f(z)$ niet uniform naar 0 kan gaan als $|z| \to \infty$ tenzij $f(z) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Met $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ volgt dat elk niet-constant polynoom $P(z)$ een nulpunt[42] heeft.

Nog veel sterkere conclusies volgen door in (F14) de z_o als variabele te zien, bijvoorbeeld z_o in een omgeving van 0, met $C = C_\rho = C_{0,\rho}$, en de (meetkundige) reeksontwikkeling

$$\frac{1}{z-z_o} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{z_o}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{z_o}{z^2} + \frac{{z_o}^2}{z^3} + \frac{{z_o}^3}{z^4} + \cdots \quad (0 < |z_o| < |z| = \rho)$$

in te vullen in (F14). Dit geeft

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\left(\frac{1}{z} + \frac{z_o}{z^2} + \frac{{z_o}^2}{z^3} + \frac{{z_o}^3}{z^4} + \cdots\right)dz. \tag{F17}$$

[40]Op en binnen C, dan wel op C en γ en daartussen.
[41]Een bijzonder geval van de Stelling van Liouville.
[42]Dit heet de hoofdstelling van de algebra.

Verwisselen van integraal en som blijkt toegestaan, zodat

$$f(z_o) = a_0 + a_1 z_o + a_2 {z_o}^2 + a_3 {z_o}^3 + \cdots, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz.$$

Deze Taylorreeks voor $f(z_o)$ is geldig voor z_o binnen $C_\rho = C_{0,\rho}$. Geschreven met andere letters,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta,$$

is dit een bijzonder geval van (F2), namelijk $z_o = 0$.

Een nog wat slimmere toepassing van (F14) geeft het analoge bijzondere geval voor (F1), met dezelfde(!) formules voor a_n: **als $z = 0$ een geisoleerde singulariteit is van f, dan is**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta,$$

en daarmee volgt (schuif z_o op naar 0) dat (F1) geldt rond elke geisoleerde singulariteit, met $C_{z_o,\rho}$ in plaats van C_ρ in de formules voor a_n.

Onderdeel van de stelling is ook dat f in elk regulier punt (i.h.b. ook rond elke geisoleerde singulariteit) oneindig vaak term voor term differentieerbaar is. Daarbij verandert de voorwaarde $0 < |z - z_o| < R$ voor convergentie in (F2) niet. Ook differentiëren naar z_0 in (F14) blijkt toegestaan[43], zodat **in een regulier punt z_o (algemene formule van Cauchy)**

$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_{z_o,\rho}} \frac{f(z)}{(z - z_o)^{n+1}}\, dz, \qquad \text{(F18)}$$

waarmee volgt dat een begrensde functie, waarvoor alle punten in $\mathbb{C}$ regulier zijn, een complexe afgeleide heeft die overal nul is, en dus zelf constant is[44]. Tenslotte is, zowel voor (F1) als (F2) de grootst toegestane R de afstand tot het dichtsbijzijnde niet-reguliere punt $z \neq z + 0$. Als alle andere punten regulier zijn dan is $R = \infty$ en geldt (F1) voor alle $z \neq z_o$.

Samenvattend tot nu toe.

Cauchy-Goursat: de kringintegraal van een (complex differentieerbare) functie met alleen reguliere punten op de kromme en in het binnengebied is nul.

$$\Downarrow$$

Laurent: rond een geisoleerd singulariteit is een (complex differentieerbare) functie te schrijven als Laurentreeks met integraalformules voor de coëfficienten.

$$\Downarrow$$

Residustelling: de kringintegraal van een (complex differentieerbare) functie met alleen reguliere punten op de kromme en in het binnengebied, met uitzondering van eindig veel geisoleerde singulariteiten, is gelijk aan $2\pi i$ maal de som van de residuen in het binnengebied.

[43] Met een rechtreeks argument voor het differentiequotiënt.
[44] De stelling van Liouville.

Hoe werkt het in de praktijk?

- Gegeven gewone integraal, welke functie $f(z)$, welke gesloten kromme C?
  - Laat C linksom lopen.
  - Binnen C mogen slechts eindig veel singulariteiten $z = z_j$ liggen.
  - Wat zijn de parameters (vaak één) die je naar 0 of ∞ moet sturen?
- De contour C bestaat uit meerdere stukken:
  - Welke stukken geven informatie in de limiet?
  - Heb je daar wat aan? Zonee, verzin iets anders.
  - Welke stukken geven integraal 0 in limiet? Gebruik:
    * Afschatting M voor $|f(z)|$ op dat stuk, en lengte van dat stuk.
    * Soms ook: Lemma van Jordan (bij Fourierintegralen).
- Voor elke z_j geldt[45]

  $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_j)^n$$

  rond $z = z_j$. Alleen a_{-1} draagt bij aan $\oint_C f(z)dz$. Onderscheid:
  - z_j is essentiële singulariteit (komt meestal niet voor).
  - z_j is een N-de orde pool[46]:

    $$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z - z_j)^n = \frac{g(z)}{(z - z_j)^N},$$

    waarbij

    $$g(z) = (z-z_j)^N f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_j)}{k!}(z-z_j)^k = \cdots + \frac{g^{(N-1)}(z_j)}{(N-1)!}(z-z_j)^{N-1} + \cdots$$

    een machtreeks is. Dus het residu van f in z_j is

    $$a_{-1} = \frac{g^{(N-1)}(z_j)}{(N-1)!}.$$

    Zo geschreven[47] heeft g een ophefbare singulariteit in z_j en is

    $$g^{(k)}(z_j) = \lim_{z \to z_j} g^{(k)}(z),$$

    uit te rekenen[48] met machtreekstechnieken of l'Hospital.
- Met in elke z_j het residu bepaald volgt $\oint_C f(z)dz$.
- Daarmee via limietovergang nog de oorspronkelijke integraal bepalen.

[45] $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{j,\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta$, $C_{j,\rho}$ gegeven door $\zeta = z_j + \rho \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\rho > 0$ klein.

[46] Vaak te zien aan de orde van nulpunten van teller en noemer van $f(z)$.

[47] Omdat $g(z) = (z - z_j)^N f(z)$.

[48] Beetje lastig vaak.

We zijn echter nog niet klaar. Er zijn nog andere singuliere punten dan geisoleerde singuliere punten, ook bij min of meer gewone functies. Naast te mijden punten waarin geisoleerde singulariteiten zich ophopen, bijvoorbeeld $z = 0$ bij

$$f(z) = \frac{1}{\cos(\frac{1}{z}) - 1},$$

om maar eens een engerd[49] te noemen, zullen we vooral punten tegenkomen waar we niet zomaar *omheen* kunnen lopen omdat $f(z)$ dan een andere waarde blijkt te moeten krijgen. Zulke punten heten *vertakkingspunten*. Een voorbeeld is $f(z) = \sqrt{z}$. Omdat $1^2 = (-1)^2 = 1$, moet deze f kiezen tussen $f(1) = 1$ en $f(1) = -1$. Als z om $z = 0$ heen mag lopen[50], dan geeft dat een probleem.

Voor reële $x > 0$ is de tweedegraadswortel uit x, zoals we weten, gelijk aan

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2}\ln x).$$

Ook de functies exp en ln, gebruikt in deze beschrijving van $\sqrt{x}$, zijn maar op één manier complex te maken, in wezen omdat ze reëel zijn gedefinieerd via limietovergangen en integralen uitgaande van rationale functies:

$$\exp(x) = \lim(1 + \frac{x}{n})^n; \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

De natuurlijke logaritme $\ln x$ is alleen gedefinieerd voor $x \in \mathbb{R}^+$ en het blijkt dat, met $\exp(1) = e$,

$$\exp(x) = e^x,$$

eerst voor gehele x, daarna ook voor alle breuken en tenslotte op grond van limietoverwegingen voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dit is de gewone e-macht uit calculus, die 1 is in $x = 0$, en zijn eigen afgeleide is.

Na

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y$$

voor $y \in \mathbb{R}$, wordt bij calculusvakken de complexe functie exp vaak gedefinieerd als

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y),$$

voor $z = x + iy \in \mathbb{C}$. **Het zal in Hoofdstuk 3 blijken dat deze definitie inderdaad de complex differentieerbare uitbreiding geeft van $\exp(x) = e^x$, maar daarvoor moeten we eerst weten wat complex limieten van complexe differentiequotiënten zijn, en hoe je aan de partiële afgeleiden naar x en naar y van het reële deel $u(x, y)$ en imaginaire deel $v(x, y)$ van $f(z)$ kunt zien of die bestaan. Dat komt aan de orde in Hoofdstuk 2.**

Omdat er maar één complexe uitbreiding van $\exp(x)$ mogelijk is[51], is deze complexe $\exp(z)$ de unieke complex differentieerbare uitbreiding van $e^x = \exp(x)$. Daarom schrijven we $e^z = \exp(z)$, ook al is er voor $z \notin \mathbb{R}$ niet echt sprake van machtsverheffen. Wel geldt voor alle z dat

$$\exp(z) = \lim(1 + \frac{z}{n})^n = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots.$$

[49] Geisoleerde singulariteiten in $z = \pm\frac{1}{2\pi n i}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

[50] In $\mathbb{C}$ kun je om nul heenlopen, in $\mathbb{R}$ niet!

[51] Hetgeen in feite volgt om dat we al weten dat e^x een machtreeks is voor $x \in \mathbb{R}$.

Op grond van de definitie is $\exp(z)$ periodiek met periode $2\pi i$ en dus kan exp, net als cos en sin, geen gewone inverse functie hebben. Oplossen van de vergelijking $\exp(w) = z$ geeft, via de absolute waarde $|z|$ en het argument $\arg z$ van z, dat

$$w = \ln|z| + i \arg z,$$

waarbij $\arg z$ als hoek alleen modulo 2π bepaald is. Bij calculus is dit een beetje aan de orde gekomen[52].

De definitie van de inverse functie log van exp moet dus wel luiden dat[53]

$$\log z = \ln|z| + i \arg z,$$

waarbij we accepteren dat de complexe logaritme[54] alleen modulo $2\pi i$ gedefinieerd is[55]. In de wiskunde *praktijk* leidt dit tot de term *meerwaardige* functie, hoewel veel wiskundeboeken menen dit woord te moeten mijden[56]. Om dit vertakkingsprobleem, waarbij de waardeverzameling van de meerwaardige functie als het ware vertakt afhankelijk van hoe we met z door $\mathbb{C}$ heenlopen. Gelukkig (?) heeft log wel een 1-waardige afgeleide:

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Omdat voor $|z-1| < 1$ geldt dat

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots,$$

heeft $\log z$ rond $z = 1$ ook een prachtige machtreeksontwikkeling

$$\log z = z - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \cdots, \tag{F19}$$

met $\log(1) = 0$. De restrictie $|z-1| < 1$ laat niet toe om met deze keuze van $\log z$ in (F19) rond $z = 0$ te lopen. Als we dat wel doen, 1 keer linksom bijvoorbeeld, dan is $\log 1 = 2\pi i$ geworden en geldt rond $z = 1$ de reeksontwikkeling

$$\log z = 2\pi i + z - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \cdots.$$

In het boek is Hoofdstuk 3 gewijd aan de complexe functies exp **en** log**, en de daarmee verwante functies.** Zoals bijvoorbeeld de complexe wortelfuncties

$$\sqrt{z} = \sqrt[2]{z} = z^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2}\log z), \quad \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} = \exp(\frac{1}{3}\log z), \ldots$$

die respectievelijk 2-waardig, 3-waardig etc. zijn.

Met de complexe e-macht zijn er nog andere manieren om op het idee van complexe integralen te komen. De nieuwe variable $z = e^{it}$ met $dz = izdt$ ligt voor de hand bij integralen met cosinussen en sinussen, bijvoorbeeld

$$\int \frac{1}{a+\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1}{a+\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz},$$

[52] Bij vergelijkingen als $z^3 = -1$ voor om drie waarden voor $\sqrt[3]{-1}$ te bepalen.
[53] Raak niet in de war door het gebruik van dezelfde letter z bij de inverse functie.
[54] Genoteerd met log, we schrijven meestal ook log voor ln.
[55] A basic fact of scientific life as we know it.
[56] Omdat functies per definitie 1-waardig zijn.

waarna met $\int_0^{2\pi}$ voor t een integraal over $|z| = 1$ verschijnt die we met de residustelling aan kunnen pakken. En met de complexe definitie van $\sqrt{z}$ en $\log z$ kunnen we ook variaties op (F3), meestal met x van 0 naar ∞, aan. Andere integralen die we complex aankunnen kunnen zijn Fouriertransformaties als (F4), waarvoor het Lemma van Jordan nog een extra hulpmiddel biedt als de integrand klein wordt van orde $1/R$ en het niet meteen wint van de R in de lengte van de cirkelboog in (F9). Ook de inversieformule voor de Laplace transformatie leidt tot een complexe lijnintegraal[57].

De integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \tag{F20}$$

kan niet complex, maar die kunnen we wel via de transformatie naar poolcoördinaten in de dubbele integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x-y^2}\, dxdy = \pi,$$

uiteindelijk gewoon via primitiveren[58].

Naast alle complexe escapades met reële integralen, is, met name ook in de fysica, de toepassing van complexe functietechnieken bij het vinden van harmonische functies belangrijk. Het reële en imaginaire deel $u(x, y)$ en $v(x, y)$ van $f(z)$ zijn namelijk harmonisch, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$. Omdat de samenstelling van twee complex differentieerbare functies met de kettingregel weer complex differentieerbaar is, kun je proberen harmonische functies op ingewikkelde domeinen te maken met behulp van afbeelidingen naar eenvoudige gebieden, waarbij je voor die afbeeldingen weer complex differentieerbare functies gebruikt. De echte fysische problemen (potentiaaltheorie, stromingsleer) zijn natuurlijk 3-dimensionaal, maar vaak is een 2-dimensionale oplossing toch bruikbaar[59]. Zo mogelijk laten we hier nog wat van zien in de laatste week van deel 1.

[57] De Bromwich integraal.

[58] Van re^{-r^2} naar r.

[59] Bij luchtstroming rond vliegtuigvleugels bijvoorbeeld.

3 Programma Deel 2

Zie Secties 4.1-4.8 hieronder, een syllabus waarin Romeinse cijfers verwijzen naar de hoofdstukken in Conway. Dit is het voorlopige programma.

Week 1. Introductie deel 2.
Minstens twee verhaallijnen:

- Van IV.1.12 via o.a. IV.2.6 en IV.4.2 naar residustelling V.2.2.
- Van III.3 via o.a. VI.1-2 en VII.2 naar Riemann afbeeldingstelling VII.4.2.
- Factorisaties, bv. VII.6 en volgende secties (nog niet besproken).

Ook gedaan:

- I.6. Poincaré sfeer en stereografische projectie.
- Uitgebreide bespreking topologie aan de hand van Sectie 4.2.
  Lees en vergelijk met college topologie.
- IV.1. Zonder bewijzen, lijnintegralen via Riemann-Stieltjes sommen.
  Lees de lange eerste bullet van Sectie 4.4.

Werkcollege. Voorlopig verder met contourintegralen.

- CB81: 1-12, CB84: 1-8, CB85: 1-7

(CB81=Section 81 in Churchill & Brown etc.)

Week 2. Analytische functies en machtreeksen.

- Verband complex en reëel differentieerbaar, 1 vs meer variabelen. Zie ook

  `http://www.math.vu.nl/~jhulshof/CFT2010/diff.pdf`

- Beginnetje met Conway III, lees Sectie 4.3.

Werkcollege. Verder met

- CB81: 1-12, CB84: 1-8, CB85: 1-7

Week 3. ... Conforme afbeeldingen. Möbius transformaties.

- III.1, III.2. Machtreeksen en analytische functies tot en met Cor. 2.21.
  (Zie ook de laatste bullet in Sectie 4.2!)
- Bewijs Thm 1.3 rechtstreeks als R de limiet is in Prop. 1.4.
  (Neem aan dat die limiet bestaat, evt 0 of ∞.)
- Zelf lezen: rest van III.2.
- III.3 bijna helemaal. NB:
  - Thm 3.14 eerst voor $z \to \frac{1}{z}$ en daarna via Prop. 3.6.
  - Uitleg Def. 3.17 van het lijngeval (zie figuur) zelf lezen.
  - Uitleg 3.21 orientatie kort gedaan, zelf (na)lezen.

Werkcollege. Na CB verder met Conway:

- III.1 6,7; III.2 2,3,4,5,6,7,8,9; III.3 7,8,9,10.
  Hint: 9 en 10 samen rechtstreeks door eerst een Mobius trafo te maken die a naar 0 stuurt en $\frac{1}{\bar{a}}$ naar ∞, zie Symmetry principle III.3.19 en de laatste bullet in Sectie 4.3.

Week 4. Hoofdstuk IV1,2,3.
Van IV.1 (houd de eerste bullet van Sectie 4.4 erbij):

- IV Bewijs van Prop. 1.3, Thm 1.4 en 1.9.
- Ook $|\int_a^b f d\gamma| \leq \int_a^b |f| d|\gamma| \leq (\max_{[a,b]} |f|) V(\gamma)$.
- Curves als equivalenteklassen van rectificeerbare krommen.
- Thm 1.18.

Van IV.2-3:

- Tweede bullet van Sectie 4.4 (lezen). Cauchy's integraal formule voor cirkels en alle gevolgen: machtreeksexpansies, classificatie nulpunten, maximum modulus stelling, Liouville stelling, hoofdstelling algebra,...(al veel gedaan in deel 1 van de cursus).

Werkcollege. Van Hoofdstuk IV:

- IV.1: 1,6,9,12,16,23,24. IV.2: 1,9.

Week 5. ...., Hoofdstuk IV 4,5 en IV 7,8.
Windingsgetallen, Cauchy integraal formule, nulpunten tellen, open afbeeldingstelling. Lees de laatste twee bullets van Sectie 4.4 ernaast.

Werkcollege.

- IV.5: 1,6,9. IV.7: 2,3,4,7.

Week 6 en 7. Selectie uit Hoofdstuk V, VI en VII.
$H(G)$ en schets bewijs Riemann afbeelding stelling.
Werkcollege.

- Selectie uit V.1-2.

Tentamen. 3 uitgebreide sommen

- Theoriesom over (..... informatie volgt).
- Residustellingsom met windingsgetallen en singulariteiten.
- Som over conforme afbeeeldingen.

4 Samenvatting Deel 2

We change to English. In the second part we still have to do many integrals the complex way, because in the end we only did integrals of rational functions in the first part. This leaves Fourier integrals (CB80=Section 80 in Churchill & Brown, CB81), integrals involving curves facing close encounters[60] with singularities, branch points and branch cuts (CB82,83,84) and $\int_0^{2\pi}$ integrals of expressions in $\cos\theta$ and $\sin\theta$ (CB85) and Bromwich integrals (CB89) for inverse Laplace transforms. Ignore CB86-87.

Exercises still to do from CB:

- CB81: 1-12, CB84: 1-8, CB85: 1-7

The rest of the course is based on Conway's book.

4.1 Conway, Chapter 1, $\mathbb{C}$ introduced

- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ with $\mathbb{C} \ni a + bi = (a, b) \in \mathbb{R}^2$
  The complex multiplication follows from $i \cdot i = i^2 = -1$ and reads:

  $$(a + bi) \cdot (c + di) = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) = ac - bd + (bc + ad)i$$

  With $+$ and $\cdot$ the plane $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ has the algebraic structure of a field, which contains the familiar field $\mathbb{R}$ as the horizontal real axis.

  The multiplication dot $\cdot$ is often not written.

- Complex conjugate $\overline{z}$ and absolute value $|z|$:

  for $\mathbb{C} \ni z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\overline{z} = x - iy$ and $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

  The nonnegative number $|z|$ is the distance of z to the origin.

  Note that $|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$ and
  $$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

  The map $z \to \frac{1}{\overline{z}}$ is a reflection in the unit circle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
  The map $z \to \overline{z}$ is a reflection in the real axis $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$.
  The map $z \to \frac{1}{z}$ is the product of these two (commuting) reflections.

- Triangle inequality $|z + w| \leq |z| + |w|$. Complex proof:
  $$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = |z|^2 + \underbrace{z\overline{w} + w\overline{z}}_{2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq 2|z||w|} + |w|^2 \leq (|z| + |w|)^2,$$

  with equality iff $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \geq 0$.

  Reverse triangle inequality $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leq |z \pm w|$.

[60] Of the third kind?

- Polar coordinates:

$z = x + iy = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\,\mathrm{cis}\,\theta.$

  - $|z| = r$ (the distance of z to the origin).
  - $\arg z = \theta$ (the argument of z, defined up to a multiple of 2π).
  - $\mathrm{cis}\,\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ (temporary notation, later $e^{i\theta} = \mathrm{cis}\,\theta$).
  - $\mathrm{cis}\,0 = 1,\ \mathrm{cis}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ \mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},$
    $\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{2} = i,\ \mathrm{cis}\,\pi = -1,\ \mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{2} = -i,\ \mathrm{cis}\,2\pi = 1 = \mathrm{cis}\,0$, etc.
  - $\mathrm{cis}\,(\theta_1 + \theta_2) = \mathrm{cis}\,\theta_1\ \mathrm{cis}\,\theta_2$.
  - $z_1 = r_1\,\mathrm{cis}\,\theta_1,\ z_2 = r_2\,\mathrm{cis}\,\theta_2 \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{cis}\,(\theta_1 + \theta_2)$
  - De Moivre's formula: $(\mathrm{cis}\,\theta)^n = \mathrm{cis}\,(n\theta)$.
  - Using polar coordinates it is easy to find roots, cube roots, etc.

- Geometric concepts/objects described in complex notation.
  - $|z - w|$ is the distance from z to w.
  - $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| = r$ is a circle if $\alpha \in \mathbb{C}$ and $r > 0$, which circle?
  - $D_r(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$ is an open disk if $\alpha \in \mathbb{C}$ and $r > 0$.
  - $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| \leq r$ is a closed disk if $\alpha \in \mathbb{C}$ and $r > 0$.
  - $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - \alpha| < R$ is an open annulus if $\alpha \in \mathbb{C}$ and $R > r > 0$.
  - $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \alpha| < R$ is a punctured open disk if $\alpha \in \mathbb{C}$.
  - Which line is $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| = |z - \beta|\}$ if $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ with $\alpha \neq \beta$?
  - Which line is $\{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Im}\,\frac{z-\alpha}{\beta} = 0\}$ if $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$?
  - Which open half plane is $\{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Im}\,\frac{z-\alpha}{\beta} > 0\}$ if $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$?
  - Which open half plane is $\{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Im}\,\frac{z-\alpha}{\beta} < 0\}$ if $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$?

- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ as a map of the globe (by stereographic projection).
  - The unit globe is $S = \{Z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$,
    (Z because Z will correspond to $z = x + iy$ shortly).
  - North pole: $N = (0, 0, 1) \in S$.
  - The line through N and $Z = (x_1, x_2, x_3) \neq N$ intersects the equatorial plane in a point $(x, y, 0)$, which defines $z = x + iy$:
    * every $Z \in S\backslash\{N\}$ corresponds to a unique $z \in \mathbb{C}$ and vice versa.
    * Nice exercise:
      $z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$.
    * Nice exercise:
      $x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1},\ x_2 = -i\frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1},\ x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$.
    * And: if $Z, W \in S\backslash\{N\}$ correspond to $z, w \in \mathbb{C}$ then

$$d(Z, W) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}$$

      is the distance between Z and W in $S \subset \mathbb{R}^3$.

* So

$$d(Z,N) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}},$$

where you can think of N as corresponding to $z = \infty$.

4.2 Conway, Chapter 2, topology of $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ and ...

NB. Conway denotes the empy set $\emptyset$ by a small (empty) square.

- Topology is extremely useful in (mathematical and other) applications. It provides a general framework for many concepts:
  - continuity of functions;
  - connectedness and compactness properties of sets;
  - combining these concepts to prove existence of solutions (of equations we/you should want to solve).

  Topology comes in two forms, with or without a metric (distance).

- Metric topology on a nonempty set X requires a *metric* d on X. A metric on X assigns to every $x, y \in X$ a real number $d(x,y)$ in such a way that
  - $d(x,y) \geq 0$;
  - $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
  - $d(x,y) = d(y,x)$;
  - $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x)$,

  for all $x, y, z \in X$. If d is a metric on X, the pair (X,d) is called a metric space. To say that X is metric space sloppily means that the choice of the metric d is considered to be obvious.

- Convergence and sequential compactness in (complete) metric spaces.
  - A *Cauchy sequence* in a metric space X is a sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X with $d(x_m, x_n) \to 0$ when $m, n \to \infty$.
  - A sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in a metric space X is called *convergent* in X if $d(x_n, L) \to 0$ when $n \to \infty$ for some *limit* $L \in X$. The limit is then unique.
  - A metric space X is complete if all Cauchy sequences in X are convergent in X.
  - Equivalent: the intersection of a decreasing sequence of closed nonempty subsets with diameter[61] going to zero is a singleton (Cantor's Theorem).
  - $K \subset X$ is closed if every sequence in K which is convergent in X (has a limit in X) is also convergent in K (the limit lies in K).
  - In complete metric spaces X: $K \subset X$ is complete $\Leftrightarrow K \subset X$ is closed.

[61] Observe you use the metric to define the *diameter* of a set.

- $K \subset X$ is sequentially compact if every sequence in K has a subsequence which is convergent in K.
- In complete metric spaces X: $K \subset X$ is sequentially compact $\Rightarrow K \subset X$ is closed and bounded.

- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ is a complete metric space. Moreover:
  - Heine-Borel Theorem: $K \subset \mathbb{C}$ is sequentially compact $\Leftrightarrow K$ is closed and bounded.
- Pointwise continuity for complex functions $f : G \to \mathbb{C}$ with $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ or $f : X \to \mathbb{C}$ with X a metric space.
  - The ϵ-δ formulation is used to define what $L = \lim_{z\to z_o} f(z)$ means:

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall z \in G :\, 0 < |z - z_o| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon.$$

    Here $L \in \mathbb{C}$. Note that z_o does not have to be in G, but it should at least be in the closure[62] of G, otherwise the definition is meaningless.
  - Continuity of f in z_o means $f(z_o) = \lim_{z\to z_o} f(z)$.
  - Pointwise continuity of $f : G \to \mathbb{C}$ means: f is continuous in every $z_o \in G$.
  - A real valued pointwise continous function on a sequentially compact set K achieves a global maximum and minimum on K.
  - A pointwise continous function on a sequentially compact set K is uniformly continuous. In other words, the ϵ-δ relation can be chosen imdependent of z_o.
- Metric *topology* is based on the concept of (small) open balls.
  - For $x \in X$ and $r > 0$ the open ball with center x and radius r is

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, r) < r\}.$$

  - With open balls (disks) you can define what an open set is.
    * $A \subset X$ open if every $x \in A$ is in some $B(x, r)$ contained in A.
    * Such x are called interior points of A.
    * A is open if every $\alpha \in A$ is an interior point of A.
    * $B \subset X$ is closed $\Leftrightarrow$ the complement $A = X\backslash B$ is open.
  - The collection of open sets has three important properties:
    * $\emptyset$ and X are open;
    * unions of open sets are open;
    * finite intersections of open sets are open.
  - The collection of closed sets has the properties:
    * $\emptyset$ and X are closed;
    * finite unions of closed sets are closed;

[62] The smallest closed set containing G.

    * intersections of closed sets are closed.

- This collection of open sets is called the metric topology on X. The three properties of the collection of open sets in a metric space are the axioms for a topology on X. *Much* of the analysis of metric spaces can be done *without metric topology*. However, there are *important* examples of *non-metric topologies*. The more general topological approach starts from a collection of subsets of X, called the *open sets* in X. These are required to have the same three properties as the open sets in a metric space. Different metrics may give the same (metric) topology.

- Metric topology works well for subsets of $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ with the standard metric $d(z, w) = |z - w|$, the distance between z and w. The open ball $B(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$ is really the open disk $B(\alpha, r) = D_r(\alpha)$.

- Another important example of a metric topological (vector) space:
  the space $H(G)$ of all complex differentiable functions $f : G \to \mathbb{C}$ (defined on some open connected $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$).
  It is not so easy to define the metric on $H(G)$ because it is not a metric that comes from a norm. It is in fact a bounded metric.

- The topological formulation of continuity:

  - For $G \subset \mathbb{C}$ and $f : G \to \mathbb{C}$, pointwise continuity of f is equivalent to all inverse images of open sets in $\mathbb{C}$ being open (relatively open if G is not assumed to be open).
  - If X is a topological space then $f : X \to \mathbb{C}$ is called continuous if all inverse images of open sets in $\mathbb{C}$ are open in X.

- In analysis we only consider topological spaces X in which the elements can be separated by open sets: if $a, b \in X$ and $a \neq b$, then there are open subsets $A \ni a$ and $B \ni b$ with $A \cap B = \emptyset$. Such spaces are called Hausdorff topological spaces.

- Relative topologies.

  - If X is a topological space and $\emptyset \neq A \subset X$, then the relative topology on A (to be precise, the topology on X relative to A), consists of all intersections of open sets in X with A.
  - If X is metric space and $\emptyset \neq A \subset X$, then A is also a metric space. There are thus two ways to define (the same) topology on A: show that the metric topology relative to A coincides with the topology on A defined by the metric restricted to A.
  - If X is a topological space and $\emptyset \neq A \subset X$ is open, then the relative topology on A consists of the open subsets of X contained in A.

- Open *connected* subsets $G \subset \mathbb{C}$ appear as natural domains for complex differentiable functions $f : G \to \mathbb{C}$. What are *connected open sets* and what are *connected sets*?

  - A topological space X is called connected if it is not
    the disjoint union of two nonempty open subsets of X.

- If X is a topological space and $\emptyset \neq A \subset X$, then A is connected if it is connected with respect to the relative topology.
- In $\mathbb{R}$ the connected (open) sets are the (open) intervals.
- An open set $G \subset \mathbb{C}$ is connected if it is not
the disjoint union of two nonempty open sets.
Such a set is called a *region*.
- An equivalent statement for open sets $G \subset \mathbb{C}$ is:
every two points in G can be connected by a polygonal curve in G (with only horizontal and vertical segments in fact).
- Every open set $G \subset \mathbb{C}$ is a countable union of
mutually disjoint open subsets of $\mathbb{C}$
(many of which may be the empty set),
the nonempty sets in the union are the *components* of G.

• *Simply connected* subsets of a metric space X are defined using homotopy theory. In words this amounts to all closed continuous maps from the circle to the subset $A \subset X$ being continuously deformable in A to a constant map. For open connected subsets $G \subset \mathbb{C}$ this is equivalent to every nonzero complex differentiable function $f : G \to \mathbb{C}$ having a complex differentiable square root $\sqrt{f} : G \to \mathbb{C}$. We shall use the latter characterisation when we prove theorems about simply connected open subsets G of $\mathbb{C}$.

• Compactness and sequential compactness.

- If X is a topological space then $K \subset X$ is called compact if every open covering of K has a finite subcovering of K.
- In metric spaces:

  $K \subset X$ is sequentially compact $\Leftrightarrow$ $K \subset X$ is compact.

  The non-trivial proof of $(\Rightarrow)$ requires Lebesgue's covering Lemma: given an open covering of a sequentially compact K there is $\epsilon > 0$ such that for all $z \in K$ there is a set G in de covering such that $B(z, \epsilon) \subset G$.
- If X is a metric space then:
$K \subset X$ is compact $\Leftrightarrow$ K is closed and totally bounded.
- K is totally bounded if, for every $\epsilon > 0$, K is contained in a finite union of open balls with radius ϵ. Think of the centers as policemen controlling all of K, arbitrarily close surveillance is always possible if there are enough policemen.
- Alternative formulation of compactness with intersections:
any family of closed subsets of K with the property
that every finite intersection of these sets is nonempty,
has nonempty intersection.
- Heine-Borel Theorem:
$K \subset \mathbb{C}$ is compact $\Leftrightarrow$ K is closed and bounded.

- In general metric spaces it only holds that:
  K is compact $\Rightarrow K$ is closed and bounded.
  The converse does not hold in general, in particular it does not hold in $H(G)$, but we will see that there is an alternative definition which allows a criterium for compactness.
- $K \subset X$ is called precompact in X if its closure in X is compact.

• Continuity, compactness en connectedness in general topology
Let X, Y be topological spaces, $f : X \to Y$.

  - f is continuous means: $B \subset Y$ open $\Rightarrow f^{-1}(B)$ open in X.
  - Equivalent: $B \subset Y$ closed $\Rightarrow f^{-1}(B)$ closed in X.
  - Continuous images of compact sets are compact.
  - Continuous images of connected sets are connected.

• Uniform convergence of sequences of functions.

  - Let X be a set and Ω a metric space with metric ρ. A sequence of functions (maps) $f_n : X \to \Omega$ (where $n = 1, 2, 3, \ldots$) converges uniformly to a limit function $f : X \to \Omega$ if

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N\, \forall n \geq N\, \forall x \in X : \rho(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

  - If so, and X is a metric space and all $f_n : X \to \Omega$ are continuous, then $f : X \to \Omega$ is also continuous.
  - Special case $X = K \subset \mathbb{C}$ compact, $Y = \mathbb{C}$. The metric

$$d(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\}$$

  makes
$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} : f \text{ is continuous}\}$$
  a complete metric space. Note that $||f|| = d(f, 0)$ defines a norm on the vector space $C(K)$, which is a (complete) normed space. If $||f_n - f_m|| \to 0$ as $m, n \to +\infty$, then f_n converges to a limit in $C(K)$.
  - This metric (norm) does not make

$$C(G) = \{f : G \to \mathbb{C} : f \text{ is continuous}\}$$

  a metric (normed) space if $G \subset \mathbb{C}$ is open, because it is not well defined on $C(G)$, nor is it well defined on $H(G)$.

• Uniform convergence of series of complex valued functions.

  - Let X be a set and $u_n : X \to \mathbb{C}$ (where $n = 1, 2, 3, \ldots$). The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

  is called uniformly convergent if the partial sums converge uniformly to a limit function. The limit is (also) denoted by the sum above and is called the sum of the series.

– Weierstrass M-test. Suppose there are (nonnegative) real numbers M_n such that $|u_n(x)| \leq M_n$ for all $x \in X$ and all n. Then the series is uniformly convergent if

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

4.3 Conway, Chapter 3, complex differentiable functions

Although many (ugly) functions from real calculus, like $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, with $f(0) = 0$ defined separately, will turn out to be not complex differentiable in their exceptional points, many of our standard functions can be complexified and differentiated with respect to their complex variable. The complex generalisation of differentiation is introduced below.

- Differentiability. Let $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ be open, $f : G \to \mathbb{C}$. Then f is called (complex) differentiable in $a \in G$ if

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  exists. The limit is called $f'(a)$, the (complex) derivative of f in a.
  The following examples, statements (and their proofs) may be copied from real calculus.

  – Using the identity (fill in the dots)

$$z^n - w^n = (z - w) \underbrace{(z^{n-1} + \cdots + w^{n-1})}_{n-1 \text{ terms}},$$

  the functions $z \to z^n$ are differentiable in every $a \in \mathbb{C}$ for every positive integer n, with the derivative you expect:

$$(z^n)' = nz^{n-1} (\text{ and likewise } \quad ((z-\alpha)^n)' = n(z-\alpha)^{n-1}).$$

  – For $z \neq 0$ (respectively $z \neq \alpha$) this is also true.

  – f is (complex) differentiable in $a \in G \Rightarrow f$ is continuous in $a \in G$.

  – If also $g : G \to \mathbb{C}$ is differentiable in $a \in G$ then $fg : G \to \mathbb{C}$ is differentiable in a and Leibniz' product rule holds:

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

  – For the chain rule assume $f(G) \subset \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ open and $g : \Omega \to \mathbb{C}$ differentiable in $b = f(a)$, $a \in G$. If f is differentiable in a then $g \circ f : G \to \mathbb{C}$ is differentiable in a with

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

  – If G is also connected, and $f : G \to \mathbb{C}$ is differentiable with $f'(z) = 0$ for all $z \in G$, then $f(z)$ is equal to a constant on G.

We note that considering $G \subset \mathbb{R}^2$ and writing

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \quad \Phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y)),$$

complex differentiability in $\alpha = a + ib \in G$ is more than (Frechet) differentiability of the map $\Phi : G \to \mathbb{R}^2$ in (a,b), which is defined in terms of the linearization of $\Phi(x,y)$ around (a,b). This involves a 2x2 matrix A, which is then necessarily equal to

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{(evaluated in } (a,b)\text{)}.$$

If Φ is Frechet differentiable in (a,b) with linearization given by A, then f is complex differentiable in $\alpha = a + ib$ if in addition the Cauchy-Riemann equations hold in (a,b), that is

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{in } (a,b).$$

This is equivalent to A defining a linear map which is a rotation followed by a point multiplication.

- Series. Let $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. The series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent in $\mathbb{C}$ if the partial sums $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ converge in $\mathbb{C}$ to a limit $S \in \mathbb{C}$, i.e.

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \, \forall n \geq N \, : \, |s_n - S| = |\sum_{k=0}^{n} a_k - S| < \epsilon.$$

  Notation: $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is called absolutely convergent if $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ is convergent in $\mathbb{R}$.

  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is absolutely convergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent in $\mathbb{C}$. The proof consists of showing that s_n is a Cauchy sequence.
  - Multiplication of two absolutely convergent series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Let $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, then $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ is absolutely convergent, and

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

- Power series. These are series of the form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

  with $a \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ and $z \in \mathbb{C}$.

  NB. From here on we shall destinguish between $-\infty$, $+\infty$ and ∞. The symbol ∞ is reserved exclusively for the point at infinity in the extended complex plane $\mathbb{C}_\infty$. Thus ∞ corresponds to the North Pole on the Poincaré sphere via stereographic projection.

It principle it depends on z whether the series is convergent in $\mathbb{C}$. If it is, then the z-dependent sum of the series is denoted by $f(z)$. It may happen that only $f(a)$ is defined, and it may happen that $f(z)$ is defined for all $z \in \mathbb{C}$. These two extreme cases correspond to $R = 0$ and $R = +\infty$ in the statements below.

- Every power series has a unique $R \in [0, +\infty]$ such that
  * The power series is absolutely convergent if $|z - a| < R$, uniformly on every disk $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$ with $0 < r < R$.
  * The terms in the power series are unbounded if $|z - a| > R$.

  This R is called the radius of convergence. It can be defined in terms of the coefficients by

  $$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \inf_{N \geq 0} \sup_{n \geq N} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

  Note that lim sup is defined for real nonnegative A_n by

  $$\limsup A_n = \lim_{N \to +\infty} \sup_{n \geq N} A_n = \inf_{N \geq 0} \sup_{n \geq N} A_n,$$

  if the sequence A_n is bounded (making the sups a nonincreasing sequence with a nonnegative limit). If the sequence of real nonnegative A_n is unbounded then all the sups and the limsup are understood to be $+\infty$. If this happens in the formula for R with $A_n = |a_n|^{\frac{1}{n}}$, then $R = 0$. If the limsup in the formula for R is zero, then $R = +\infty$.
- If

  $$R = \lim_{n \to +\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$

  exists (including the divergent limit case $+\infty$), then it is the radius of convergence. It is instructive to prove directly that with this R the convergence properties above hold.
- The power series is uniformly convergent on $D_r(a)$ if $0 < r < R$.
- Consequently f is continuous on $D_R(a)$.
- Two power series

  $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n \quad \text{and} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - a)^n$$

  convergent on $D_r(a)$ may be multiplied term by term to produce a new power series

  $$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n \quad \text{with} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

  convergent on $D_r(a)$, with $h(z) = f(z)g(z)$. The radius of h is at least equal to the minimum of the radii of f and g.
- Examples:

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \ \text{ has } R = 1; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \ \text{ has } R = +\infty; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n \ \text{ has } R = 0.$$

- – By a direct proof, involving again the identity

$$z^k - w^k = (z - w)(z^{k-1} + \cdots + w^{k-1}),$$

  $f : D_R(a) \to \mathbb{C}$ is differentiable with (term by term differentiation)

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} (z-a)^n,$$

  with the same R for the differentiated power series.
- – This last statement applies again to $f' : D_R(a) \to \mathbb{C}$, etc.
- – Thus

$$a_n = f^{(n)}(a) \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

- l'Hôspital's rule. With $f(z)$ and $g(z)$ defined as power series above,

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0}{b_0} = \frac{f(0)}{g(0)} \quad \text{if} \quad g(0) = b_0 \neq 0,$$

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{f'(0)}{g'(0)} \quad \text{if} \quad f(0) = g(0) = 0 \neq g'(0),$$

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{f''(0)}{g''(0)} \quad \text{if} \quad f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = 0 \neq g''(0),$$

  etc. This is l'Hôspital's (repeated) rule for $\frac{0}{0}$ limits.
  If l'Hôspital's (repeated) rule fails for $\lim \frac{f}{g}$ it works for $\lim \frac{g}{f}$.

- Analyticity. Conway calls a function $f : G \to \mathbb{C}$ (with $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ open) analytic if it is complex differentiable in every point of G and if $f' : G \to \mathbb{C}$ is continuous. The latter will turn out be an automatic consequence of complex differentiability on G, but the proof will be postponed till after the development of the theory for analytic functions. Real vectorcalculus (Green) will not be used. Power series are obviously analytic in their open disk of convergence. The first goal in Chapter 4 is to show the converse, using complex integration, where continuity (but not differentiability like in Churchill and Brown) of the integrands is required in the proofs. Also the use of unmathematical statements about curves is avoided.

- With Conway's definition of analytic and writing

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

  f is analytic on an open set G if and only if u and v have continuous first order partial derivatives on G which satisfy

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{in all of } G.$$

- If in this case u and v have continuous second order partial derivatives[63] on G, then both u and v are harmonic. They are called harmonic conjugates. Every harmonic function on a open disk or on $\mathbb{C}$ has a harmonic conjugate, but $\log(x^2 + y^2)$ does not have one on $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. This will be clear from the discussion of the complex logarithm below.

[63] We will see that this in fact automatic.

- The complex exponential function is defined as

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

for all $z \in \mathbb{C}$, and it satisfies $\exp'(z) = \exp(z)$ and $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$. It is not hard to derive that

$$\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \operatorname{cis} y,$$

so that from now on we may forget cis. The exponential function is $2\pi i$-periodic and never zero. The functions cos and sin may be defined by

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

- Writing $w = \exp(z)$, its inverse on $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ is computed as

$$\log w = \log |w| + i \arg w,$$

which is a multi-valued function because $\arg w$ is defined modulo 2π only. Thus $\log w$ is really the solution set

$$\{z \in \mathbb{C} : \exp(z) = w\}.$$

Interchanging the role of z and w, a continuous function $f : G \to \mathbb{C}$ on an open connected set $G \subset \mathbb{C}$ is a called branch of the logarithm if $\exp(f(z)) = z$ for all $z \in G$. If such a branch exists, all the other branches of the logarithm are of the form $g(z) = f(z) + 2k\pi i$ with k an integer. All these g are branches of the logarithm and analytic, with derivative

$$f'(z) = g'(z) = \frac{1}{z}.$$

The proof uses an argument for the differentiability of inverses of analytic functions which mimics the real calculus inverse function theorem for functions of one real variable.

The standard choice with $\arg z \in (-\pi, \pi)$ and $z \notin (-\infty, 0]$ is an example of a branch of the logarithm with $G = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$.

- Analytic functions as conformal mappings. This is explained looking at smooth curves and their images, and examining their tangent vectors.

- Möbius transformations. These are variants of the map $z \to \frac{1}{z}$ and are best considered on the extended complex plane $\mathbb{C}_\infty$. Considering lines as circles (through ∞) they take circles to circles. For given distinct $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ the cross ratio is defined by

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3},$$

with obvious extensions for limit cases in which one of the points is ∞. This cross ratio is real if and only if z_1, z_2, z_3, z_4 lie on a circle or line. The relation

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}$$

defines a symmetry relation between z and z^*: they are each others mirror images under reflection in the circle/line through z_2, z_3, z_4. The map

$$z \to (z, z_2, z_3, z_4)$$

takes the points z_2, z_3, z_4 to $1, 0, \infty$. The cross ratio is invariant under the Möbius transformations

$$z \to \frac{az+b}{cz+d},$$

which are required to have $ad - bc \neq 0$. Note that $z \to (z, z_2, z_3, z_4)$ is itself a Möbius transformation. The exercises III.3.3 25,26,2,7,29 discuss the Möbius transformations as a group, in relation to the group of 2×2 matrices with complex entries a, b, c, d.

- In relation to exercises III.3.3 9,10 it is nice to already examine the Möbius transformation

$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

which will reappear later. What does it do to the unit circle $|z| = 1$? And to the open disk $|z| < 1$? Show its inverse is ϕ_{-a}.

4.4 Conway, Chapter 4, complex integration

- Riemann-Stieltjes integrals and line integrals.
  - Line integrals will be defined for curves described by $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. If $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ is continuous, it is called a *path*. For integration paths should have finite length.
    * To define this concept, introduce

$$V(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

for $P = \{a = t_0 \leq t_1 < \cdots \leq t_m = b\}$ and $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.
Such a P is called a partition of $[a,b]$. The maximal length of a subinterval of P is

$$||P|| = \max_{k=1,\ldots,m} (t_k - t_{k-1})$$

    * If for a given $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ the set of all numbers $V(\gamma, P)$ is bounded, then $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ is said to be of *bounded variation*.
    * The supremum

$$V(\gamma; [a,b]) = V(\gamma) = \sup_P V(\gamma, P)$$

is called the total variation of γ on $[a,b]$.
    * We shall write

$$|\gamma|(t) = V(\gamma; [a,t]),$$

which may be discontinuous (not if $\gamma(t)$ is continuous).

* If $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ is also continuous,
then γ is called a rectifiable path (with finite length $V(\gamma)$).
* If $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ is continuously differentiable,
then γ is called a smooth[64] path.
* If $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ is a smooth path,
then γ is a rectifiable path, with finite length

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

– We next need to define Riemann-Stieltjes integrals

$$\int_a^b f \, d\gamma,$$

for $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continuous and $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ of bounded variation, defined as limits of Riemann-Stieltjes sums

$$\sum_{k=1}^{m} f(\tau_k) \left(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right),$$

with $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$. We may define

$$\int_a^b f \, d\gamma = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{m} f(\tau_k) \left(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right),$$

meaning that for any $\epsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that the absolute value of the difference between right and left hand side is smaller than $\epsilon > 0$, provided $||P|| < \delta$. It is a theorem (IV, Thm 1.4) that in this sense the integral exists if $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ is continuous and $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ is of bounded variation.

* Riemann-Stieltjes integrals can be defined/computed as

$$\int_a^b f \, d\gamma = \int_a^b f(t) \, d\gamma(t) = \int_a^b f(t)\gamma'(t) \, dt,$$

if $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ is continuous and $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ is smooth.
* The obvious linearity properties in f and γ hold.
* The obvious concatenation properties hold
(important for integration over continuous piecewise smooth paths).
* This triangle inequality and maximum estimate holds:

$$|\int_a^b f \, d\gamma| \leq \int_a^b |f| \, d|\gamma| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \, V(\gamma).$$

– Line integrals will be defined as

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z) \, dz = \int_a^b f \circ \gamma \, d\gamma,$$

[64]Many authors require in addition that $\gamma'(t) \neq 0$, why?

if $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{C}$ is continuous[65] and of bounded variation (in other words, $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{C}$ is a rectifiable path) and f is defined and continuous on the *trace*

$$\{\gamma\}=\{z=\gamma(t):\ a\le t\le b\}$$

of γ.

- If $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{C}$ is continuously differentiable, then

$$\int_\gamma f=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt,$$

for $f:\ [a,b]\to\mathbb{C}$ continuous.
This generalises the substitution formula from calculus.

  * The obvious linearity properties in f hold.
  * The obvious concatenation properties hold.
  * Continuous piecewise smooth paths can be evaluated using the generalised substitution formula.
  * It is convenient to also define

$$\int_\gamma f\,|dz|=\int_a^b f\circ\gamma\,d|\gamma|=\int_a^b f(\gamma(t))\,d|\gamma|(t)=\int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'|(t)\,dt,$$

the latter expression being valid if γ is smooth.

  * The triangle inequality and this maximum estimate hold:

$$|\int_\gamma f|\le\int_\gamma |f(z)|d|z|=\int_a^b |f\circ\gamma|\,d|\gamma|\le\max_{z\in\{\gamma\}}|f(z)|\,V(\gamma).$$

- Reparametrization. Assuming $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{C}$ rectifiable and f defined and continuous on $\{\gamma\}$, let $\phi:\ [c,d]\to[a,b]$ be continuous, non-decreasing and surjective. Then $\gamma\circ\phi$ is rectifiable and

$$\int_\gamma f=\int_{\gamma\circ\phi}f.$$

If $\phi:\ [c,d]\to[a,b]$ is non-increasing instead of non-decreasing, then

$$\int_\gamma f=-\int_{\gamma\circ\phi}f.$$

- Equivalence classes of rectifiable paths. If

$$\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{C}\quad\text{and}\quad\sigma:\ [c,d]\to\mathbb{C}$$

are rectifiable, and

$$\phi:\ [c,d]\to[a,b]\text{ is continuous, strictly increasing and surjective,}$$

such that

$$\sigma=\phi\circ\gamma,$$

then γ and σ are called equivalent, and ϕ is called a change of parameter. A curve is by definition an equivalence class $[\gamma]$ of rectifiable paths. Of course we always write γ instead of $[\gamma]$. Note that the begin- and endpoint of a curve are well defined.

[65] Continuity is required to make $f\circ\gamma$ continuous.

- If a curve γ with beginpoint α and endpoint β lies in an open set $G \subset \mathbb{C}$, and $F : G \to \mathbb{C}$ is analytic, then

$$\int_\gamma F' = F(\beta) - F(\alpha).$$

  This is proved by approximating a line integral with line integrals over polygonial curves. If the curve is closed (i.e. $\beta = \alpha$) then $\oint_\gamma F' = 0$. There are many contininuous complex valued functions f which give nonzero integrals over closed curves, so most continuous $f : G \to \mathbb{C}$ do not have a (complex) primitive!

- If $G \subset \mathbb{C}$ is open, $f : G \to \mathbb{C}$ analytic and $a \in B(a, R) \subset G$. Then $f(z)$ has a power series expansion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \quad \text{convergent for} \quad |z-a| < R.$$

This is proved using Cauchy's integral formula on circles and suitable geometric series expansions only.

- For $|z| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi.$$

  In other words:

$$\oint_\gamma \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i \quad \text{for } \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ given by } \gamma(s) = e^{is}.$$

  Proof. Replacing z by tz the statement is

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - tz} ds = 2\pi,$$

  which is clear for $t = 0$. Differentiate with respect to t and use Leibniz' rule for differentiating an integral with respect to a parameter: bring $\frac{d}{dt}$ inside the intergral and carry out the differentation.This produces an expression which has a 2π-periodic primitive with respect to s. Thus the integral with z replaced by tz is independent of t and with $t = 1$ the result follows.

- Cauchy's integral formula with circles.
  If $a \in B(a, r) \subset \overline{B(a, r)} \subset G \subset \mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ analytic, then

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (CIF)$$

  for $z \in B(a, r)$ and $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ given by $\gamma(s) = a + re^{is}$. This is Cauchy's integral formula for a circle. Formulated and proved *before* Cauchy's theorem about when $\oint_\gamma f = 0$ holds.
  Proof. Assume $a = 0$ and $r = 1$. Then the statement is equivalent to

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi f(z).$$

Replacing $f(e^{is})$ by $f(z)$ equality holds in view of the equality proved above. Replace $f(e^{is})$ by $f(te^{is}+(1-t)z)$ instead and argue as in the proof above.

– Maximum modulus theorem. If $|f(a)| \geq |f(z)|$ for all $z \in B(a,r)$ then $|f(a)| = |f(z)|$ for all $z \in B(a,r)$, and this implies that $f'(z) = 0$ for all $z \in B(a,r)$, f is constant in $B(a,r)$. Conclude somewhere below that a nonconstant analytic function on an open connected set G cannot have a point in G where its modulus is maximal.

– Power series expansions.
Substitute

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a+a-z} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n$$

in (CIF) and interchange $\oint$ and $\sum$. This gives

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right)}_{a_n}(z-a)^n,$$

for all $z \in B(a,r)$. To justify interchanging $\oint$ and $\sum$ note that

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n + \underbrace{\frac{1}{w-a}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n}_{R_N},$$

and that the contribution of

$$R_N = R_N(w;z,a) = \frac{1}{w-a}\frac{\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{N+1}}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{N+1}}{w-z}$$

(which goes to zero uniformly in $w \in \gamma$ as $N \to +\infty$), in the CIF integral is estimated away as $N \to +\infty$.

– The above argument is an example of how uniform convergence allows limit arguments in integrals. A variant shows, now that f is a power series in every $B(a,r) \subset G$, that for every closed rectifiable curve in $B(a,r)$

$$\oint_\gamma f = 0.$$

This is Cauchy' theorem for analytic functions in balls[66].

– Let f and g be analytic in $B(a,r)$. If $f(a) = g(a) = 0$ then

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} \quad \text{if this second limit exists.}$$

If the (repeated) rule fails for $\lim \frac{f}{g}$ it works for $\lim \frac{g}{f}$.

[66]Proved without Green's theorem!

- And, since we already know that we may differentiate power series,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

- Thus if $|f(z)| \leq M$ on $\overline{B(a,r)}$ then $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{r^n}$.
- This excludes the existence of nonconstant bounded analytic functions on $\mathbb{C}$ (Liouville's theorem), a surprising statement. In fact it can be shown that an analytic function on $\mathbb{C}$ which misses two values of $\mathbb{C}$ in its range, is a constant (the little Picard theorem).
- Note that analytic functions on $\mathbb{C}$ have power series expansion with radius of convergence $R = +\infty$ around every point $a \in \mathbb{C}$. Analytic functions defined on the whole of $\mathbb{C}$ are called entire functions.
- Every power series expansion of an analytic function $f : G \to \mathbb{C}$ around $a \in G$ has a first coefficient which is nonzero, except when the power series expansion is identically equal to zero. The set of points a for which the latter happens is open and closed.
- Unless f is zero in a disk around a, $f(z) = (z-a)^m g(z)$ with m a nonnegative integer, $g : G \to \mathbb{C}$ analytic, and $g(a) \neq 0$. If $m > 0$ then a is called a zero of mulitplicity m. It is always finite!
- If G is connected, then zero's of f cannot have accumulation points, unless f is identically equal to zero. Thus the zero's of a nonconstant analytic function on an open connected set G are isolated.
- Every polynomial $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ (with $n \geq 0$ and $a_n \neq 0$) has a complex root and factorises completely:

  $$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 = a_n \Pi_{k=1}^n (z - \alpha_k).$$

  Is a similar statement true for any a nonconstant analytic function on an open connected set G? The answer will be given by Weierstrass' factorisation theorem.

- The Cauchy's integral formula can be formulated for general closed rectifiable curves in an open set G. These will be used to derive the *theorems about integration of analytic functions* over such curves. *Winding numbers* are needed to be mathematically precise.

  - For every $a \in \mathbb{C}$, and for every closed rectifiable curve γ with $a \notin \{\gamma\}$,

    $$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{w-a} dw$$

    is called the *winding number* of γ around a. Another name is the *index* of γ with respect to a.
  - $n(\gamma, a)$ is an integer.
  - $a \to n(\gamma, a)$ is a continuous function on $\mathbb{C} \backslash \{\gamma\}$.
  - $n(\gamma, a)$ is constant on every component of $\mathbb{C} \backslash \{\gamma\}$.
  - $n(\gamma, a) = 0$ if a is in the unbounded component of $\mathbb{C} \backslash \{\gamma\}$.

– There is no need to show that $a \to n(\gamma, a)$ is differentiable. But we will need

$$F_m(z) = \int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z)^m} dw \;\Rightarrow\; F_m'(z) = m F_{m+1}(z),$$

if γ is a rectifiable curve, m a positive integer, $\phi : \{\gamma\} \to \mathbb{C}$ continuous and $z \notin \{\gamma\}$.

– Cauchy's integral formula (first version). Suppose $G \subset \mathbb{C}$ open and γ is a closed rectifiable curve in G with[67] $n(\gamma, a) = 0$ for all $a \in \mathbb{C} \backslash G$. Then for $a \in G \backslash \{\gamma\}$ this Cauchy integral formula

$$n(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

holds if $f : G \to \mathbb{C}$ analytic.

For the proof let $H = \{a \in \mathbb{C} : n(\gamma, a) = 0\}$ and observe that $2\pi i$ times the difference of right and left hand side equals

$$g(a) = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz - \underbrace{\oint_\gamma \frac{f(a)}{z-a} dz}_{=\,0 \text{ in } H} = \oint_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = \oint_\gamma \phi(z, a) dz,$$

in which a is now a complex variable. Is $g(a) = 0$ for $a \in G \backslash \{\gamma\}$? Yes, by the clever observation that $g(a)$ is also defined for $a \in \{\gamma\}$, as well as, using the first expression of $g(a)$ above, for $a \in H$, when only the integral with $f(z)$ in the numerator remains, allowing a quick estimate implying

$$g(\infty) = \lim_{|a| \to +\infty} g(a) = 0.$$

After a discussion of $\phi(z, a)$ and $\oint_\gamma \phi(z, a) dz$, g turns out to be analytic. Liouville's theorem then concludes the proof!

– Cauchy's integral formula (second version) for a finite number of closed rectifiable curves $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ in G. Suppose $G \subset \mathbb{C}$ open and

$$n(\gamma_1, a) + \cdots + n(\gamma_m, a) = 0$$

for all $a \in \mathbb{C} \backslash G$. Then for $a \in G \backslash (\{\gamma_1\} \cup \cdots \cup \{\gamma_m\})$ this Cauchy integral formula

$$(n(\gamma_1, a) + \cdots + n(\gamma_m, a)) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \oint_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

holds if $f : G \to \mathbb{C}$ analytic.

[67] This replaces the stronger but inprecise condition that there are no holes in G.

- Differentiating Cauchy's integral formula for a finite number of closed rectifiable curves $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ in G with respect to a, it follows that for $a \in G \backslash (\{\gamma_1\} \cup \cdots \cup \{\gamma_m\})$

$$(n(\gamma_1, a) + \cdots + n(\gamma_m, a))f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \oint_{\gamma_k} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

holds if $f : G \to \mathbb{C}$ analytic. Special case: $m = 1$.

- Cauchy's theorem. Replacing $f(z)$ by $(z-a)f(z)$ in Cauchy's integral formula for a finite number of closed rectifiable curves $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ in G, Conway gets his first version of Cauchy's theorem: suppose $G \subset \mathbb{C}$ open and

$$n(\gamma_1, a) + \cdots + n(\gamma_m, a) = 0$$

for all $a \in \mathbb{C} \backslash G$. Then

$$\sum_{k=1}^{m} \oint_{\gamma_k} f(z)dz = 0$$

holds if $f : G \to \mathbb{C}$ analytic. Special case: $m = 1$.

  - Thus analytic functions $f : G \to \mathbb{C}$ have

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

  if $n(\gamma, a) = 0$ for all $a \in \mathbb{C} \backslash G$.
  - Are there other continuous functions $f : G \to \mathbb{C}$ with this property? No! Already if the integrals over (small) triangles are zero, you can locally construct a primitive F, which must be analytic, and so must be its derivative f. This is Morera's theorem. It implies for instance that a continuous function on G which is analytic in G except for a segment in G, is analytic in G.
  - Cauchy's theorem is also proved for closed rectifiable curves which are homotopic to a point in G. This is a stronger[68] and more geometric condition than $n(\gamma, a) = 0$ for all $a \in \mathbb{C} \backslash G$. Homotopy theory has many applications. The concepts in this proof should be discussed in every first topology course.

- Counting zero's and the open mapping theorem.

  - Notation: If γ is a closed rectifiable curve in an open set $G \subset \mathbb{C}$, then $\gamma \approx 0$ in G means that $n(\gamma, a) = 0$ for all $a \in \mathbb{C} \backslash G$.
  - Recall that $G \subset \mathbb{C}$ is a region if G is open and connected.
  - If $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ is a region and $f : G \to \mathbb{C}$ is analytic, then the zero set

$$Z_f = \{z \in G : f(z) = 0\}$$

[68] A curve can nontrivially wind around 2 points with zero individual winding numbers.

is an isolated set, unless $f(z) = 0$ for all $z \in G$, which we exclude by assumption. Note that a subset of isolated points in G is either finite (possibly empty) or countably infinite. We count the zero's with multiplicity. In the case of a finite but nonempty zero set, there are then $a_1, \ldots, a_m$ such that

$$f(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_m) g(z)$$

with $g : G \to \mathbb{C}$ analytic and non zero. This gives

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \cdots + \frac{1}{z - a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

For γ closed rectifiable in $G \subset \mathbb{C}$ with $\gamma \approx 0$ in G and

$$\oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0.$$

Thus, if $\{\gamma\} \cup Z_f = \emptyset$,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n(\gamma, a_1) + \cdots + n(\gamma, a_m).$$

This statement is formulated in a more general form next.

- Let $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ be a region, $f : G \to \mathbb{C}$ is analytic, $\alpha \in \mathbb{C}$, γ closed rectifiable in G, $\gamma \approx 0$ in G, $f(z) \neq \alpha$ for all $z \in \{\gamma\}$. Denote the multiplicity of a zero $z = a$ of $f(z) - \alpha$ by $m_\alpha(a)$. Then

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} dz = \sum_{a \in G, f(a) = \alpha} m_\alpha(a) n(\gamma, a).$$

  The sum is taken over all nonzero contributions and is in fact a finite sum, even if there are infinitely many zeros of $f(z) - \alpha$. The exceptional case of $f(z)$ being identically equal to α is excluded by the assumptions.
- Equivalently, for the closed rectifiable curve $\sigma = f \circ \gamma$,

$$n(\sigma, \alpha) = n(f \circ \gamma, \alpha) = \sum_{z \in G, f(z) = \alpha} m_\alpha(z) n(\gamma, z),$$

  if γ is closed and rectifiable in G, $\gamma \approx 0$ in G, $f(z) \neq \alpha$ for all $z \in \{\gamma\}$.
- Application. Suppose $f(z) - \alpha$ has a zero of order $m \geq 1$ in $z = a$. Then $f(z) - \alpha = (z - a)^m g(z)$ with $g(a) \neq 0$. This implies that for some small ϵ both $f(z) - \alpha$ and $f'(z)$ are nonzero for $0 < |z - a| < 2\epsilon$, so for the closed rectifiable curve $\gamma(t) = a + \epsilon \exp(it)$ we may apply the formula above, not only with α, but also with $\zeta \neq \alpha$, provided $f(z) \neq \zeta$ for all $z \in \{\gamma\}$. By continuity this must be true for all ζ in some small ball $B(\alpha, \delta)$. Since $n(\gamma, z) = 0$ for $z \notin \overline{B(a, \epsilon)}$ it follows that

$$n(f \circ \gamma, \zeta) = \sum_{z \in B(a, \epsilon), f(z) = \zeta} m_\zeta(z) n(\gamma, z).$$

The left hand side equals $n(f \circ \gamma, \alpha) = m$, the right hand side is by construction a sum in which every $m_\zeta(z) = 1$. Thus there are $z_1, \ldots, z_m \in B(a, \epsilon)$ with $f(z_k) = \zeta$ and $f'(z_k) \neq 0$ for $k = 1, \ldots, m$. The conlusion is that changing α a little bit, all zeros of $f(z) - \alpha$ have multiplicity 1, and that you get the right number of them: the zero of multiplicity m splits up in m zeros of multiplicity 1.

  - If $G \subset \mathbb{C}$ is a region and $f : G \to \mathbb{C}$ is analytic and nonconstant, then $f(U)$ is open if $U \subset G$ is open. This follows from the above reasoning, why? If f is one to one, then f^{-1} is analytic on $f(G)$. Why?

- Finally Goursat: if $f : G \to \mathbb{C}$ is complex differentiable then f is analytic. The proof is based on Morera's theorem. It suffices to show that integrals over small triangles of f are zero, and this is proved using only the complex differentiability of f.

4.5 Conway, Chapter 5, singularities

- Non-essential (isolated) singularities
  - We say that $z = a$ is an *isolated singularity* of f if
$$f : B(a, r)\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$$
is analytic for some $r > 0$.
  - $z = a$ is called *removable* if there is a $g : B(a, r) \to \mathbb{C}$ analytic with
$$f(z) = g(z) \quad \text{for all} \quad z \in B(a, r)\backslash\{a\}.$$
  - If
$$L = \lim_{z \to a} f(z) \quad \text{exists, take} \quad g(a) = L, \quad g(z) = f(z) \quad (z \neq a).$$
Morera's theorem implies $z = a$ removable.
  - In fact an *isolated singularity* $z = a$ of f is removable if and only if
$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0.$$
Proof: let $g(z) = (z - a) f(z)$, $g(a) = 0$, show directly that integrals over small triangles (consider a outside, on, or inside) of g are zero, apply Morera's theorem, and conclude what this means for f in view of $g(a) = 0$.
  - $z = a$ is called a *pole* if
$$\lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0.$$
If so, then there are analytic $g, h : B(a, r) \to \mathbb{C}$ with $h(a)g(a) = 1$, such that
$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^m h(z) \quad \text{and} \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^m}.$$

The second statement follows from the first, in which $h(a) \neq 0$. Not by inverting, but by observing $(z-a)^m f(z)$ has a removable singularity in $z = a$. The order of the pole is by definition m. It follows that

$$f(z) = \underbrace{\frac{A_m}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{A_1}{z-a}}_{\text{singular part of } f \text{ at } a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots,$$

a *Laurent series with only finitely many singular terms.*

- If $G \subset \mathbb{C}$ is a region and $f : G \to \mathbb{C}$ is analytic, except for finitely many poles, then subtracting all singular parts from f an analytic function on G remains. Reflect on the case that $f(z)$ is the quotient of two polynomials $P(z)$ and $Q(z)$, defined on $\mathbb{C}$ except for the zeros of Q. What can you say about the remaining analytic function if the degree of Q is higher than the degree of P? Relate this to partial fractions.
- After removing the singularities, poles and zeros of f become zeros and poles of $\frac{1}{f}$ and vice versa (with the same order).

• A general Laurent series around a is of the form

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

General Laurent series arise as expansions of analytic functions on

$$A(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\},$$

with $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$. This set will be called an open annulus.

- Cauchy integral formula on an annulus. Let

$$\gamma_R(t) = a + R\exp(it) \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

with $0 \leq R_1 < R < R_2 \leq +\infty$. Then

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right)}_{\text{independent of } R} (z-a)^n,$$

for any analytic $f : A(a, R_1, R_2) \to \mathbb{C}$.

- For the proof use Cauchy's integral formula (second version) with

$$m = 2, \quad \gamma_1 = -\gamma_{r_1}, \quad \gamma_2 = \gamma_{r_2}, \quad R_1 < r_1 < |z-a| < r_2 < R_2.$$

Since $n(\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z) = 0 + 1 = 1$, $n(\gamma_1, w) + n(\gamma_2, w) = -1 + 1 = 0$ for $|w-a| \leq r_1$, and $n(\gamma_1, w) + n(\gamma_2, w) = 0 + 0 = 0$ for $|w-a| \geq r_2$, it follows that

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{f_1(z)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{f_2(z)}.$$

For $f_2(z)$ argue as in the proof of power series expansions for analytic functions on a disk. For $f_1(z)$ modify this argument using

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{a-z+w-a} = \frac{1}{a-z}\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{a-z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{-n}.$$

Combine and conclude.

- Every general Laurent series around a is convergent on a maximal open annulus $A(a, R_1, R_2)$ with $R_1 \geq 0$ and $R_2 \leq +\infty$ (why?). The annulus is empty if $R_1 \geq R_2$. If $R_1 < R_2$ then the sum of the Laurent series defines an analytic function f on the open annulus. The above calculation of a Laurent series representation for this $f(z)$ should of course reproduce the Laurent series which defined f in the first place. Why is this so?
- The Laurent series expansion

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

is valid on the largest annulus $A(a, R_1, R_2)$ on which f is analytic. Term by term differentiation is allowed. If $a_{-1} = 0$ term by term primitivation is allowed to give the Laurent series of a primitive. If $a_{-1} \neq 0$ the primitive will also contain the multivalued $a_{-1}\log(z-a)$.
- a_{-1} is a called the residue of f at $z = a$, notation $a_{-1} = \mathrm{Res}(f; a)$.
- If γ is a closed rectifiable curve in $A(a, R_1, R_2)$, then

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma \frac{a_{-1}}{z-a}dz = 2\pi i\, n(\gamma, a)\, a_{-1} = 2\pi i\, n(\gamma, a)\ \mathrm{Res}(f; a).$$

- Essential (isolated) singularities.
  - Recall that isolated singularities $z = a$ of f for which

$$\lim_{z\to a} f(z) \quad \text{or} \quad \lim_{z\to a}\frac{1}{f(z)} \quad \text{exists,}$$

  always have a nice Laurent series

$$f(z) = \sum_{k=N}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \quad \text{convergent on} \quad \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < R\},$$

  the largest punctured disk on which f is analytic.
  - Laurent series with infinitely many singular terms, such as

$$\exp(z)+\exp(\frac{1}{z}) = \cdots+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{z}+2+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots,$$

  do not fit in this framework.

– In case of f having an isolated singularity at $z = a$ it always follows that $R_1 = 0$ in the discussion above. It may then happen that

$$f(z) = \sum_{k=N}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

in which case $z = a$ is a pole of order $-N$ if $N < 0$, removable if $N \geq 0$ and a zero of order N if $N > 1$.

– If not, $z = a$ is called an essential singularity. The Laurent series then has a singular part

$$f_1(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{(z-a)^n},$$

which does not terminate. Neither of the limits

$$\lim_{z \to a} f(z) \quad \text{and} \quad \lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} \quad \text{exists,}$$

because otherwise the singular part would be a finite sum.

– Wild behaviour near an essential singularity (Casorati-Weierstrass). The closure of $f(A(a, 0, \delta)$ in $\mathbb{C}$ is the whole of $\mathbb{C}$ (and then the closure of $f(A(a, 0, \delta)$ in $\mathbb{C}_\infty$ is the whole of $\mathbb{C}_\infty$), no matter how small $\delta > 0$ is taken. Otherwise there would be $c \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$ and $\delta > 0$ such that

$$|f(z) - c| > \epsilon \quad \text{for all} \quad z \in A(a, 0, \delta),$$

which makes

$$z \to \frac{z-a}{f(z) - c}$$

a function with a removable singularity in $z = a$ (which is zero in $z = a$) . But then (why?) $z = a$ is removable for f as well, a contradiction.

– Let $z = a$ be an isolated essential singularity of f. Explain why every $c \in \mathbb{C}_\infty$ appears as a limit of $f(z_n)$ with $z_n \to a$ as $n \to +\infty$.

– A much stronger statement holds for an isolated essential singularity $z = a$ of f. In every punctured open disk around a all complex numbers, except possibly one, are attained infinitely many times by f (the great Picard theorem).

- Nonisolated singularities will not be discussed. If f has a nonisolated singularity in $z = a$ then it may happen that $\frac{1}{f}$ has an isolated singularity. Also $z = a$ may be a branch point.

- The residue theorem. Let $G \in \mathbb{C}$ be a region, $a_1, \ldots, a_m \in G$ disjoint points,

$$f : G \backslash \{a_1, \ldots, a_n\} \to \mathbb{C}$$

analytic, γ a closed and rectifiable curve in G with

$$\{\gamma\} \cap \{a_1, \ldots, a_n\} = \emptyset \quad \text{and} \quad n(\gamma, z) = 0 \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{C} \backslash G.$$

Then

$$\oint_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n} n(\gamma, a_k)\,\mathrm{Res}(f; a_k)$$

– The proof is based on Cauchy's theorem for a finite number of closed rectifiable curves in the region $G\backslash\{a_1,\ldots,a_n\}$ on which f is analytic. For every $k = 1,\ldots,n$ let $m_k = n(\gamma, a_k)$ and

$$\gamma_k(t) = a_k + r_k \exp(-i m_k t) \quad (0 \le t \le 2\pi),$$

with r_k so small that $\overline{B(a, r_k)} \subset G$ are mutually disjoint. Then $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ don't intersect and

$$n(\gamma, a_1) + n(\gamma_1, a_1) + \cdots + n(\gamma_n, a_1) = m_1 - m_1 + 0 + \cdots + 0 = 0,$$

by construction. Likewise

$$n(\gamma, a_j) + n(\gamma_1, a_j) + \cdots + n(\gamma_n, a_j) = 0,$$

for every $j = 1,\ldots,m$, while for $z \in \mathbb{C}\backslash G$

$$n(\gamma, z) + n(\gamma_1, z) + \cdots + n(\gamma_n, z) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0,$$

because $|z - a_k| > r_k$. It follows that

$$\oint_\gamma f(z)dz + \underbrace{\oint_{\gamma_1} f(z)dz}_{= -2\pi i\, m_1 \mathrm{Res}(f; a_1)} + \cdots + \underbrace{\oint_{\gamma_n} f(z)dz}_{= -2\pi i\, m_n \mathrm{Res}(f; a_n)} = 0,$$

from which the statement follows.

– The residue theorem als holds if $G \in \mathbb{C}$ is a region, $a_1, a_2, \ldots \in G$ is sequence of disjoint points in G without limit points in G (so that $G\backslash\{a_1, a_2, \ldots\}$ is open),

$$f : G\backslash\{a_1, a_2, \ldots\} \to \mathbb{C}$$

analytic, γ a closed and rectifiable curve in G with

$$\{\gamma\} \cap \{a_1, a_2, \ldots\} = \emptyset \quad \text{and} \quad n(\gamma, z) = 0 \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{C}\backslash G.$$

Then

$$\oint_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{+\infty} n(\gamma, a_k)\,\mathrm{Res}(f; a_k),$$

in which only finitely many terms are nonzero.

– If $z = a$ is a pole of finite order $m \ge 1$, then

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

with g analytic in a open disk containing a and $g(a) \neq 0$. Hence

$$\mathrm{Res}(f; a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Usually $g(z)$ is computed as

$$g(z) = (z-a)^m f(z),$$

which has a removable singularity at $z = a$, in which case

$$g^{(m-1)}(a) = \lim_{z \to a} g^{(m-1)}(z),$$

is always computable, often using l'Hôspital's rule. It may be quicker to remove the singularity before differentiating though.

- Meromorphic functions and the argument principle.
  - If $G \in \mathbb{C}$ is open, $a_1, a_2, \ldots \in G$ a finite (or infinite) sequence of disjoint points (without limit points) in G, then $G \backslash \{a_1, a_2, \ldots\}$ is open. An analytic function $f : G \backslash \{a_1, a_2, \ldots\} \to \mathbb{C}$ is called meromorphic on G if every a_k is finite order pole. Thus f extends to $f : G \to \mathbb{C}_\infty$ by setting
  $$\infty = f(a_1) = f(a_2) = \cdots$$
  - So *by definition* a meromorphic function f on G is function which is analytic on G except for an atmost countably infinite set of isolated non-essential singularities. Explain why for an open connected set G, the set of zeros of a meromorphic f on G is also atmost countably infinite, unless f is constant on G. Explain why then also
  $$z \to \frac{1}{f(z)}$$
  is meromorphic on G, and that f has an atmost countable set of disjoint zeros and poles.
  - Each zero and each pole of f has finite multiplicity. When we counted zeros z_k we already did this with multiplicity, and now we do the same with poles p_k. The formula for a closed rectifiable curve γ in G which avoids both the zeros and the poles, and with $\gamma \approx 0$ in G, becomes (with an almost identical proof)
  $$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k n(\gamma, z_k) - \sum_j n(\gamma, p_j),$$
  and is called the argument principle. Conway explains how this number counts the multiple of 2π which is added to $\arg f(z)$ as the parameter t in $\gamma : [a, b] \to G$ runs from $t = a$ to $t = b$, as well as what this statement really means.
  - If also $g : G \to \mathbb{C}$ analytic is given, then, changing the dummy variable from z to w,
  $$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(w) f'(w)}{f(w)} dw = \sum_k g(z_k) n(\gamma, z_k) - \sum_j g(p_j) n(\gamma, p_j).$$

– If $\overline{B(a,R)} \subset G$ let $\Omega = f(B(a,R))$. Then Ω is open unless f is constant. If f is one to one on $\overline{B(a,R)}$, then, for $z \in B(a,R)$ and $\xi = f(z) \in \Omega$,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{g(w)f'(w)}{f(w)-\xi} dw = g(z),$$

for $\gamma_R(t) = a + R\exp(it), 0 \leq t \leq 2\pi$. In particular

$$f^{-1}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{g(w)f'(w)}{f(w)-\xi} dw.$$

– Rouché's theorem. If both f and g are meromorphic on G and $\overline{B(a,R)} \subset G$, with no poles or zero's on $\{\gamma_R\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$, and if the strict triangle inequality

$$|f(z) + g(z) < |f(z)| + |g(z)$$

holds for $z \in \{\gamma_R\}$, then $Z_f - P_f = Z_g - P_g$, where Z_f, Z_g and $P_f = P_g$ denote the (finite) numbers of zeros and poles of f and g in $B(a,R)$, counted with multiplicity.
The proof is based on the observation that the asumption implies that the inequality implies that

$$\frac{f(z)}{g(z)} \notin [0,\infty), \quad \text{so that} \quad \log(\frac{f(z)}{g(z)})$$

can be defined on and near γ_R. Thus

$$0 = \oint_{\gamma_R} \frac{(\frac{f}{g})'}{\frac{f}{g}} = 2\pi i \oint_{\gamma_R} \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) = 2\pi\left(Z_f - P_f - Z_g + P_g\right).$$

What can you conclude if you apply this with $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ and $g(z) = z^n$?

4.6 Conway, Chapter 6, Maximum modulus theorem

What are the bijective analytic maps from a nonempty bounded open disk to another nonempty bounded open disk?

- If both disks are the open unit disk $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ then you can choose $a \in D$ and demand $f(a) = 0$. It is a nice exercise to show that the Möbius map

$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

is such a bijection. It also takes the boundary bijectively to the boundary, its inverse is ϕ_{-a}, and $\phi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$, $\phi_a'(0) = 1 - |a|^2$ (both derivatives are positive).

- It is a nice theorem that, upto a factor $c \in \mathbb{C}$ with $|c| = 1$, it is the unique analytic bijection between D and itself which takes a to 0. That is, $f = c\phi_a$ with $a \in D$ and $|c| = 1$. This theorem is easily adapted to answer the original question. It is in fact a special case of the Riemann mapping theorem discussed in the next section.

– The proof is based on Schwarz' lemma. If f is analytic on the open unit disk D, with $f(0) = 0$ and $|f(z)| \leq 1$ for all $z \in D$, then $|f'(0)| \leq 1$ and $|f(z)| \leq |z|$ for all $z \in D$. Equality in the first inequality or, in some $z \neq 0$, equality in the second inequality is only possible if $f(z) = cz$ with $|c| = 1$.

– The proof of Schwarz's lemma requires the maximum modulus theorem for the analytic function $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ which has a removable singularity in $z = 0$. Use the open mapping theorem to show that it is impossible that the modulus $|g(z)|$ has an interior maximum on any smaller disk $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ (unless $g(z)$ is constant, whence $f(z) = cz$ with $|c| \leq 1$, in which case the proof is done). Since $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ on the boundary of D_r it follows that $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ on D_r for any $0 < r < 1$, whence $|g(z)| \leq 1$ on D. Equality is again impossible unless $g(z)$ is constant c, now with $|c| = 1$. That leaves $|g(z)| < 1$ on D and completes the proof of Schwarz' lemma.

– If f is analytic on the open unit disk D with $|f(z)| \leq 1$ for all $z \in D$, take $a \in D$ and $\alpha = f(a)$. Then the composition $g = \phi_\alpha \circ f \circ \phi_{-a}$,

$$g : D \overset{\phi_\alpha}{\rightarrow} D \overset{f}{\rightarrow} \overline{D} \overset{\phi_{-a}}{\rightarrow} \overline{D},$$

takes 0 to 0. By Schwarz' lemma and the chain rule

$$1 \geq |g'(0)| = \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |a|^2}|f'(a)| \quad \text{so that} \quad |f'(a)| \leq \frac{1 - |a|^2}{1 - |\alpha|^2}.$$

Equality only if $g(z) = cz$ with $|c| = 1$.

– If $f\, D \to D$ is an analytic bijection, with $f(a) = 0$, then this estimate applies to $f'(a)$ and $(f^{-1})'(0)$, while their product is equal to 1, as well as the product of the right hand sides in the estimates. Hence equality holds above for g and the proof follows.

4.7 Conway, Chapter 7, analysis in $H(G)$

An important reason for introducing the metric structure on $H(G)$ is that it allows a nice proof of the Riemann Mapping Theorem, which builds on our knowledge of Möbius transfrmations.

- The Riemann mapping theorem says that every region G which is not the whole plane and on which every nonzero analytic function has an analytic square root, allows an analytic function $f : G \to D$ to the open unit disk which is bijective. The function f can be chosen to have $f(a) = 0$ and $f'(a) > 0$, for a given $a \in G$.

- The special case $G = D$ was encountered above. It implies uniqueness of f given the conditions $f(a) = 0$ and $f'(a) > 0$.

- The proof shows how useful the metric structure on $H(G)$ will be. It considers, for fixed $a \in G$ the class $\mathcal{F}$ of injective analytic functions $f : G \to D$, shows that the closure of this class is compact in $H(G$, and equal to $\mathcal{F} \cup \{0\}$. The map $f \to f'(a)$ is continuous on $\mathcal{F} \cup \{0\}$ and thus has a positive maximum. To finish the proof, it must be shown to be surjective. If it is not, Schwarz' lemma, Möbius transformations and the square root assumption are combined to force a contradiction.

This should be enough motivation for some of the technicalities involved in the description of $H(G)$ as a metric space. We introduce *a* metric on $H(G)$ to define *the* metric topology on $H(G)$. The metric is in fact defined for continuous functions.

- Ω is always a complete metric space with metric d.
- Important: $\Omega = \mathbb{C}$ or $\Omega = \mathbb{C}_\infty$.
- $G \subset \mathbb{C}$ is open and not empty.
- $C(G, \Omega)$ is the space of all continuous functions $f : G \to \Omega$.
- To measure $f : G \to \Omega$ introduce compact (nested sets) K_n, $n = 1, 2, \ldots$, such that K_n is contained in the interior of K_{n+1}, G is the union of all K_n, and every component of $C_\infty \backslash K_n$ contains a component of $C_\infty \backslash G$.
- Define
$$\rho_n(f, g) = \sup_{z \in K_n} d(f(z), g(z)).$$
This is not a metric on $C(G, \Omega)$.
- Define
$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}$$
This is a metric on $C(G, \Omega)$ with $\rho(f, g) < 1$.
Note that $\rho_n(f, g)$ is allowed to be come large with n.
- The metric topology does not depend on the specific choice of the sets K_n.
- Convergence of a sequence f_n in $C(G, \Omega)$ is equivalent to uniform convergence on every compact subset of G.
- A likewise statement holds for Cauchy sequences in $C(G, \Omega)$.
- A set $\mathcal{F}$ in $C(G, \Omega)$ is (sequentially) precompact if every sequence in $\mathcal{F}$ has a subsequence which is convergent in $C(G, \Omega)$.
- A set $\mathcal{F}$ in $C(G, \Omega)$ is normal if it is (sequentially) precompact.
- $\mathcal{F}$ in $C(G, \Omega)$ is normal $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ has compact closure in $C(G, \Omega)$
- Arzela-Ascoli theorem: $\mathcal{F}$ in $C(G, \Omega)$ is normal $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ in $C(G, \Omega)$ is equicontinuous and $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ is precompact in Ω.
- Equicontinuity of $\mathcal{F}$ in a point $z_o \in G$: in the $\epsilon - \delta$ definition the choice of $\delta > 0$ is possible in terms of $\epsilon > 0$ and z_o, independent of $f \in \mathcal{F}$.

$H(G)$ is contained in $C(G, \mathbb{C})$. Cauchy's integral formula's lead to

- The map $f \to f'$ is continuous from $H(G)$ to itself.

- $H(G)$ is closed in $C(G,\mathbb{C})$.
- $H(G)$ is a complete metric space.
- Suppose G is a region, $f_n \to f$ in $H(G)$ and $f \not\equiv 0$. Then if $a \in \overline{B(a,R)} \subset G$ with $f \neq 0$ on the boundary of $\overline{B(a,R)}$, the numbers of zeros (counted with multiplicity) of f_n and f in $B(a,R)$ coincide for n large.
- $\mathcal{F} \subset H(G)$ is called locally bounded if it is bounded on every $\overline{B(a,R)} \subset G$.
- Montel's theorem: $\mathcal{F} \subset H(G)$ is locally bounded $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F} \subset H(G)$ is normal.
- $\mathcal{F} \subset H(G)$ is compact $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ is closed and locally bounded.

The proof of the Riemann mapping theorem can now be given, see dicussion above, meromorphic functions, discussed first, are not needed in the proof.
For a region $G \subset \mathbb{C}$ let $M(G)$ be the space of meromorphic functions, the analytic functions with only isolated non-essential singularities in G. If $f \in M(G)$ then also $\frac{1}{f} \in M(G)$, unless $f \equiv 0$. The reciprocal of the latter function would be the function identical to ∞, also denoted by ∞. $M(G)$ is contained in $C(G,\mathbb{C})$ and $M(G) \cap \{\infty\}$ is closed in $C(G,\mathbb{C})$, with the above defined metric topology, in which the distance function

$$d(Z,W) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$$

is used on $\mathbb{C}_\infty$. Thus $M(G) \cap \{\infty\}$ is complete. For every $f \in M(G)$ and $a \in G$ define the quantity

$$\mu(f)(a) = \lim_{z \to a} \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

A family $\mathcal{F}$ in $M(G)$ is normal (precompact) in $C(G,\mathbb{C})$ if $\mu(\mathcal{F})$ is locally bounded. The limit of a sequence for which this is the case may be ∞, e.g. $f_n(z) = nz$.

4.8 Conway, Chapter 7, product formula's

If time allows, we will discuss the Weierstrass factorisation theorem in which the functions E_p defined by

$$E_p'(z) = -z^p \exp(z + \cdots + \frac{z^p}{p}), \quad E_p(1) = 0,$$

and factorisations

$$\Pi_{n=1}^{+\infty} E_{p_n}(\frac{z}{a_n})$$

are important, where a_n are the nonzero zero-points of a given analytic f. We will see that

$$\sin(\pi z) = \pi z\, \Pi_{n=1}^{+\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2}), \quad \Gamma(z) = \frac{\exp(-\gamma z)}{z}\, \Pi_{n=1}^{+\infty}(1 + \frac{z}{n}) \exp(\frac{z}{n}),$$

and the relation with the Riemann zeta-function.

If time allows we will discuss variations of Stirling's formula

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\, dt \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

and the saddle point method.