METRISCHE RUIMTEN EN CONTINUE AFBEELDINGEN

aanvullend materiaal voor het college Analyse 1

Dr J. Hulshof (R.U.L.)

1. Inleiding. In deze syllabus behandelen we een aantal fundamentele onderwerpen uit de analyse. Uitgangspunt hierbij is de volgende algemene probleemstelling:

Laat X een puntverzameling zijn en A een niet-lege deelverzameling van X, eventueel X zelf. Zij $f : A \to \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie. Hoe en onder wat voor veronderstellingen kunnen we dan concluderen dat de functie f op A een globaal maximum aanneemt, m.a.w. bestaat er een punt $x_0 \in A$, zo dat

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A?$$

Om deze vraag te beantwoorden beschouwen we het supremum van f op A,

$$M = \sup\{f(x) : \ x \in A\} \ \in \ \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Wat we van M nu willen weten is ten eerste of M eindig is, en zo ja, of de waarde M ook door de functie f wordt aangenomen. Omdat M het supremum is van alle door f aangenomen functiewaarden, kunnen we M benaderen met deze functiewaarden. We onderscheiden twee gevallen.

(i) $M < +\infty$. Dan bestaat er voor elk natuurlijk getal n een $x_n \in A$, zodat

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

(ii) $M = +\infty$. Dan bestaat er voor elk natuurlijk getal n een $x_n \in A$, zodat

$$f(x_n) > n.$$

In beide gevallen geeft dit ons een rij punten, genoteerd als $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, in A. Als we nu kunnen concluderen dat, eventueel door een aantal van deze punten uit de rij weg te laten, deze punten voor grote waarden van $n \in \mathbb{N}$ steeds dichter komen te liggen bij een "limietpunt" dat zelf ook in A ligt, en dat de waarde van f in dat limietpunt gelijk is aan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

dan hebben we in één klap de beide bovenstaande vragen met ja beantwoord. In deze syllabus zullen we de voor bovenstaande probleemstelling relevante begrippen behandelen, met hier en daar een zijstapje.

In de vorige alinea staat de zinsnede ”dichterbij”. Aangezien we van X alleen maar hebben aangenomen dat X een puntverzameling is, heeft dit zonder verdere veronderstellingen geen betekenis. Een natuurlijke manier om dit de verhelpen is de invoering van een zogenaamde afstandsfunctie of metriek op X. Dit leidt dan tot de definitie van een metrische ruimte (Sectie 2). De deelverzamelingen waarvoor altijd een limietpunt van een rij bestaat blijken de zogenaamde rijkompakte verzamelingen te zijn (Sectie 3). Voor functies op (deelverzamelingen van) metrische ruimten kan het begrip ”continu” worden gedefinieerd (Sectie 5), waarmee de bovenstaande limietovergang kan worden gerechtvaardigd. Als voorbeeld behandelen we de gevallen dat $X = \mathbb{R}$ en $X = \mathbb{R}^N$ (Sectie 6). In de appendix komen nog enige iets meer geavanceerde onderwerpen met betrekking tot kompaktheid aan de orde.

De schrijver van deze syllabus is van mening dat iedere student in de wiskunde of theoretische natuurkunde, onafhankelijk van wat hij/zij in de doctoraalfase als afstudeerrichting kiest, zich de basisstof in Sectie 1 tot en met 6 van deze syllabus moet eigen maken. In de meeste theoretische analyse boeken is deze stof, althans voor het geval $X = \mathbb{R}^N$, terug te vinden in de inleidende hoofdstukken. Zie bijvoorbeeld het boek ”Mathematical Analysis, a modern approach to advanced calculus” van T.M. Apostol (Addison-Wesley 1957), waarin bijna alle analyse die in de eerste twee jaar van de studie aan de orde komt, is terug te vinden, of ”Principles of Mathematical Analysis” van W. Rudin (McGraw Hill 1964). Voor meer algemene metrische (en topologische) ruimten zijn er o.a. de boeken ”Topology and Normed Spaces” van G.J.O. Jameson (Wiley 1974) en ”Introduction to Topology and Modern Analysis” van G.F. Simmons (McGraw Hill 1963).

Als voorkennis wordt verondersteld dat de lezer bekend is met de elementaire verzamelingsleer, begrippen als aftelbaar oneindig en overaftelbaar oneindig, en met de axioma's voor de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ en de reëele getallen $\mathbb{R}$. Hoofdstuk 1 uit het boek ”Calculus 1 2nd edition” van T.M. Apostol (Wiley 1967) is ruim voldoende.

2. Metrische ruimten. Laat X weer een puntverzameling zijn.

Definitie 2.1. Een functie $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heet een *metriek* op X als
(i) $\forall x, y \in X$:

$$d(x,y) \geq 0 \quad \text{en} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y.$$

(ii) $\forall x, y \in X$:

$$d(x,y) = d(y,x).$$

(iii) $\forall x, y, z \in X$:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \text{(driehoeksongelijkheid)}.$$

Als $d: X \times X \to \mathbb{R}$ een metriek is, dan heet het paar (X, d) een *metrische ruimte*.

Het is duidelijk dat op een verzameling X meerdere metrieken kunnen zijn gedefinieerd. Toch spreekt men vaak over de metrische ruimte X i.p.v. over de metrische ruimte (X, d). Aangenomen is dan dat over de stilzwijgend gemaakte keuze van de metriek d geen misverstand kan bestaan. In het vervolg is X nu steeds een metrische ruimte met metriek d.

Voorbeeld 2.2. $X = \mathbb{R}$ is de verzameling van de reële getallen, met $d(x,y) = |x-y|$.

Opmerking 2.3. Iedere deelverzameling van een metrische ruimte is met dezelfde metriek weer een metrische ruimte.

Definitie 2.4. Laat $A \subset X$.
(i) Een punt $a \in A$ heet een *inwendig punt* van A als

$$\exists \delta > 0 : \quad B_\delta(a) = \{x \in X : \ d(x,a) < \delta\} \ \subset \ A.$$

De verzameling $B_\delta(a)$ heet de open bol met straal δ en middelpunt a.
(ii) Een punt $a \in A$ heet een *geisoleerd punt* van A als

$$\exists \delta > 0 : \quad B_\delta(a) \cap A = \{a\}.$$

(iii) Een punt $p \in X$ heet een *ophopingspunt* van A als

$$\forall \delta > 0 \ \exists a \in A : \quad a \neq p \ \text{ en } \ d(a,p) < \delta.$$

(iv) Als elk punt van A een inwendig punt van A is, dan heet A een *open deelverzameling* van X.
(v) Als het complement van A,

$$A^c = X - A = \{x \in X : x \notin A\},$$

open is , dan heet A een *gesloten deelverzameling* van X.

In het vervolg zullen we kortweg zeggen dat A open (gesloten) is als A een open (gesloten) deelverzameling van X is.

Stelling 2.5. (i) Iedere open bol is een open verzameling.
(ii) Een verzameling A in X is open dan en slechts dan als A een vereniging van open bollen is.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.6. (i) X is open, de lege verzameling is open.
(ii) De vereniging van elke collectie open deelverzamelingen is open.
(iii) De doorsnede van elk eindig aantal open deelverzamelingen is open.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.7. (i) X is gesloten, de lege verzameling is gesloten.
(ii) De doorsnede van elke collectie gesloten deelverzamelingen is gesloten.
(iii) De vereniging van elk eindig aantal gesloten verzamelingen is gesloten.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.8. Laat $A \subset X$. Dan is A gesloten dan en slechts dan als A al zijn ophopingspunten bevat.

Bewijs. Neem eerst aan dat A gesloten is en laat p een ophopingspunt zijn van A. We moeten laten zien dat $p \in A$. Stel niet. Dan $p \in A^c$. Maar A^c is open, dus p is een inwendig punt van A^c. Zodoende is er een $\delta > 0$ waarvoor $B_\delta(p) \subset A^c$, in tegenspraak met de veronderstelling dat p een ophopingspunt is van A. Dus p ligt wel in A.

Neem vervolgens aan dat A een verzameling is die al zijn ophopingspunten bevat. We tonen aan dat A gesloten is door te bewijzen dat A^c open is. Zij $p \in A^c$. Dan is p geen ophopingspunt van A, dus er is een $\delta > 0$ zo dat $B_\delta(p)$ geen punten van $A - \{p\}$ bevat, en wegens $p \in A^c$ betekent dit dat $B_\delta(p) \subset A^c$. m.a.w. p is een inwendig punt van A^c. Dit geldt voor elke $p \in A^c$, en dus is A^c open. Q.e.d.

Definitie 2.9. Een rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ in X heet *convergent* als er een $x_0 \in X$ is zo dat

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_\varepsilon \; \Rightarrow \; d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Het punt x_0 heet de *limiet* van de rij.

Stelling 2.10. Als de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ in X convergent is, dan is de limiet x_0 eenduidig bepaald, notatie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\text{ of }\; x_n \to x_0.$$

Bewijs. Neem aan dat de rij twee verschillende limieten heeft, zeg x_0 en x_0'. Omdat $x_0 \neq x_0'$, is $d(x_0, x_0') > 0$. Kies $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} d(x_0, x_0')$. Dan is er een n_ε zo dat $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_\varepsilon$. Evenzo is er een n_ε' zo dat $d(x_n, x_0') < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_\varepsilon'$. Met behulp van de driehoeksongelijkheid volgt nu

$$d(x_0, x_0') \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, x_0') < \varepsilon + \varepsilon < d(x_0, x_0').$$

voor $n \geq \max(n_\varepsilon, n_e')$, tegenspraak. Q.e.d.

In plaats van "de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ is convergent", zegt men ook wel dat "$\lim_{n\to\infty} x_n$ bestaat".

Stelling 2.11. Als de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ in X convergent is, dan is de rij begrensd, d.w.z. bevat in een vaste (open) bol $B_\delta(a) \subset X$.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.12. Laat $A \subset X$ gesloten zijn. Als de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ in A convergent is in X, dan ligt de limiet in A.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.13. Laat $A \subset X$ en $p \in X$. De volgende drie uitspraken zijn equivalent:
(i) p is een ophopingspunt van A.
(ii) Er bestaat een rij $(a_n)_{n=1}^\infty$ in $A - \{a\} = \{x \in A : \; x \neq a\}$ die convergent is met p als limiet.
(iii) Iedere (niet-lege) open bol met middelpunt p bevat oneindig veel punten van A.

Bewijs. ($i \;\Rightarrow\; ii$). Neem aan dat p een ophopingspunt van A is. We construeren de rij $(a_n)_{n=1}^\infty$ in A. Kies $\varepsilon_1 > 0$. Dan is er een $a_1 \in A - \{a\}$ met $d(a_1, p) < \varepsilon_1$. De rij

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wordt nu verder inductief gedefinieerd door voor $n = 1, 2, \ldots$, nadat a_n gekozen is, $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2} d(a_n, p)$ te stellen, en $a_{n+1} \in A - \{a\}$ met $d(a_{n+1}, p) < \varepsilon_{n+1}$ te kiezen. Opgave: laat zien dat $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon_n$ en dat de rij naar p convergeert.

$(ii \Rightarrow iii)$. Opgave.

$(iii \Rightarrow i)$. Triviaal.

We merken nog eens op dat de bovenstaande begrippen in principe afhangen van de keuze van de metriek op X. Toch kunnen verschillende metrieken tot hetzelfde leiden.

Definitie 2.14. Laat X een metrische ruimte zijn met metriek d, en laat $\bar{d}$ een andere metriek op X zijn. Dan heten d en $\bar{d}$ *equivalent* op X als er een reëel getal $\lambda > 0$ bestaat zo dat

$$\frac{1}{\lambda} d(x, y) \leq \bar{d}(x, y) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Opgave 2.15. Laat zien dat bij overgang op een equivalente metriek op X de in deze Sectie geintroduceerde begrippen (open, gesloten, convergent, etc.) niet veranderen. Hetzelfde geldt voor de begrippen die in de volgende drie secties worden behandeld (rijkompaktheid, volledigheid en continuiteit).

Op grond van het voorafgaande is het duidelijk dat voor het welslagen van de in de inleiding geschetste bewijsmethode, de geslotenheid van A vereist is. Dit staat echter los van de vraag of de in de inleiding geconstrueerde rij een limietpunt heeft.

3. Rijkompakte verzamelingen. We gaan nu de deelverzamelingen A karakteriseren waarvoor de in de inleiding geschetste bewijsmethode zal slagen.

Definitie 3.1. Laat $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij zijn in X.
(i) Als $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ een strict stijgende rij natuurlijke getallen is, dan heet de rij $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ een *deelrij* van $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
(ii) Als $x_0 \in X$ de limiet is van een convergente deelrij van $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dan heet x_0 een *limietpunt* (ook wel: rijophopingspunt) van $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Stelling 3.2. Een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X heeft een convergente deelrij met limiet x_0 dan en slechts dan als

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \ \exists k \geq n : \quad d(x_k, x_0) < \varepsilon.$$

Bewijs. Opgave.

Definitie 3.3. Laat $A \subset X$. A heet *rijkompakt* als iedere rij in A een limietpunt in A heeft.

Er is nog een andere definitie van kompaktheid die niet uitgaat van de metriek op X, maar van de open deelverzamelingen van X. In de appendix zullen we deze definitie behandelen, en laten zien dat de beide definities voor deelverzamelingen van metrische ruimten hetzelfde betekenen.

Stelling 3.4. Gesloten deelverzamelingen van rijkompakte verzamelingen zijn weer rijkompakt.

Bewijs. Merk eerst op: als $G \subset A \subset X$, dan kan het gesloten zijn van G op twee manieren worden opgevat: gesloten in A of gesloten in X. Opgave: laat zien dat, als A gesloten is in X, dan

$$G \text{ is gesloten in } A \iff G \text{ is gesloten in } X.$$

Stel dat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij is in G. Omdat A rijkompakt is, bestaat er een convergente deelrij met limiet in A. Daar G gesloten is ligt de limiet in G. Conclusie: elke rij in G heeft een convergente deelrij met limiet in G. Q.e.d.

Stelling 3.5. (i) Laat (X_1, d_1) en (X_2, d_2) twee metrische ruimten zijn. Dan is het Cartesisch produkt X van X_1 en X_2,

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : \quad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

weer een metrische ruimte t.a.v. de metriek gedefinieerd door

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \quad \forall x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in X = X_1 \times X_2.$$

(ii) Als A_1 rijkompakt is in X_1 en A_2 rijkompakt is in X_2, dan is $A = A_1 \times A_2$ rijkompakt in $X = X_1 \times X_2$.

Bewijs. Opgave.

Stelling 3.6. Laat A een rijkompakte deelverzameling zijn van X. Dan is A gesloten en begrensd.

Bewijs. Opgave.

4. Volledigheid.

Definitie 4.1. Een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X heet *een Cauchyrij* als

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \quad m, n \geq n_\varepsilon \ \Rightarrow\ d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Stelling 4.2. Iedere convergente rij is een Cauchyrij.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij met limiet x_0. Laat $\varepsilon > 0$, en gebruik de definitie van convergentie met $\frac{1}{2}\varepsilon$. Dan,

$$\forall m, n \geq n_{\frac{1}{2}\varepsilon} : \quad d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ was willekeurig, dus de rij is een Cauchyrij. Q.e.d.

Stelling 4.3. Iedere Cauchyrij is begrensd.

Bewijs. Opgave.

Stelling 4.4. Als een Cauchyrij een limietpunt heeft, dan is de Cauchyrij convergent.

Bewijs. Laat $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een Cauchrij zijn die een convergente deelrij heeft. Laat $\varepsilon > 0$ en gebruik de definitie van Cauchyrij. Dus

$$\forall m, n \geq n_\varepsilon : \quad d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Anderzijds, omdat de rij een convergente deelrij heeft, zeg met limiet x_0, bestaat er een $k_\varepsilon > n_\varepsilon$ zodat

$$d(x_{k_\varepsilon}, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Beide ongelijkheden combinerend vinden we

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{k_\varepsilon}) + d(x_{k_\varepsilon}, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Definitie 4.5. Als iedere Cauchyrij in X convergent is, dan heet X *volledig*.

Om na te gaan of een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in een volledige metrische ruimte X convergent is, hoeft men slechts na te gaan dat de rij een Cauchyrij is. Daarbij is het niet nodig om a priori de limietwaarde te kennen. Het bewijs van een belangrijke stelling in de analyse, de Banach contractie stelling, berust op dit principe:

Stelling 4.6. Laat X een volledige metrische ruimte zijn, en $T : X \to X$ een contractie, d.w.z. een afbeelding met de eigenschap dat

$$\exists \theta \in [0,1) : \quad d(T(x), T(y)) \leq \theta d(x,y) \; \forall x, y \in X.$$

Dan is er precies één vast punt van T, d.w.z. een punt $\bar{x}$ in X met de eigenschap dat $T(\bar{x}) = \bar{x}$. Bovendien geldt voor elke $x \in X$ dat de rij gedefinieerd door

$$x_1 = T(x), \quad x_{n+1} = T(x_n) \; (n = 1, 2, \ldots),$$

convergent is met limiet $\bar{x}$.

Bewijs. Merk eerst op dat er hoogstens een vast punt kan zijn, immers als $\bar{x}$ en $\bar{y}$ vaste punten zijn, dan

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T(\bar{x}), T(\bar{y})) \leq \theta d(\bar{x}, \bar{y}) \;\Rightarrow\; d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \;\Rightarrow\; \bar{x} = \bar{y}.$$

Laat nu $x \in X$ willekeurig en laat de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de in de stelling gedefinieerde rij zijn. We gaan bewijzen dat dit een Cauchyrij is. Neem hiertoe twee natuurlijke getallen m, n met $m < n$. Dan, door herhaald toepassen van de driehoeksongelijkheid,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

We gebruiken de notatie

$$T^0(x) = x, \quad T^1(x) = T(x), \quad T^2(x) = T(T(x)), \quad T^3(x) = T(T(T(x))), \quad \text{etc.}$$

Omdat
$$d(x_k, x_{k+1}) = d(T^k(x), T^{k+1}(x)) \leq \theta^k d(x, T(x)),$$
volgt nu dat
$$d(x_m, x_n) \leq (\theta^m + \theta^{m+1} + \cdots + \theta^{n-1}) d(x, T(x)) \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} d(x, T(x)) \to 0 \quad \text{als } m \to \infty.$$
Dus $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is een Cauchyrij. Omdat X volledig is heeft deze rij een limiet $\bar{x}$, dus $T^n(x) \to \bar{x}$. Maar dan geldt ook dat $T^{n+1}(x) \to \bar{x}$, terwijl
$$d(T^{n+1}(x), T(\bar{x})) = d(T(T^n(x)), T(\bar{x})) \leq \theta d(T^n(x), \bar{x}) \leq d(T^n(x), \bar{x}) \to 0.$$
Dit impliceert dat $T^{n+1}(x) \to T(\bar{x})$. Omdat de limiet van een convergente rij uniek bepaald is, kunnen we dus concluderen dat $\bar{x} = T(\bar{x})$. Q.e.d.

Er is nog een andere karakterisatie van het begrip volledigheid, die wordt gegeven door de volgende stelling.

Stelling 4.7. (Cantor) Een metrische ruimte X is volledig dan en slechts dan als voor elke dalende rij gesloten deelverzamelingen
$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \ldots,$$
met de eigenschap dat
$$\operatorname{diam}(F_n) = \sup_{x,y \in F_n} d(x, y) \to 0 \text{ als } n \to \infty,$$
geldt dat de doorsnede
$$\cap_{n=1}^{\infty} F_n$$
precies één punt bevat.

5. Continue afbeeldingen.

Definitie 5.1. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, en $f : A \to Y$ een afbeelding. (i) f heet *continu in* $a \in A$, als
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A : \quad d(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$
(ii) f heet continu in A als f continu is in elke $a \in A$.

Stelling 5.2. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, $f : A \to Y$ een afbeelding, en $a \in A$. Dan is f continu in a dan en slechts dan als voor elke rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in A met $a_n \to a$ in X geldt dat $f(a_n) \to f(a)$ in Y.

Bewijs. Neem aan dat f continu is in a en laat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij zijn in A met $a_n \to a$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, en laat $\delta > 0$ de bijbehorende δ uit de definitie van continuiteit van f in a zijn. Gebruik deze δ nu als ε in de definitie van convergentie. Dan
$$n \geq n_\delta \;\Rightarrow\; d(a_n, a) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(a_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Dus de rij $(f(a_n))_{n=1}^\infty$ convergeert naar $f(a)$.

Anderzijds, als f niet continu is in a, dan

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists a_\delta \in A: \quad d(a_\delta, a) < \delta \text{ en } d(f(a_\delta), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Kies nu $\delta = \frac{1}{n}$, en noem de bijbehorende a_δ nu a_n, dan is $(a_n)_{n=1}^\infty$ een rij in A met $a_n \to a$, terwijl de rij $(f(a_n))_{n=1}^\infty$ niet convergeert naar $f(a)$. Q.e.d.

Stelling 5.3. Laat X en Y metrische ruimten zijn, en $f: X \to Y$ een afbeelding. Dan is f continu op X dan en slechts dan als het inverse beeld onder f van iedere open deelverzameling van Y weer een open deelverzameling van X is.

Bewijs. Neem aan dat f continu is, en zij B een open verzameling in Y. We moeten bewijzen dat het inverse beeld onder f van B open is. We laten zien dat elk punt van $A = f^{-1}(B)$ een inwendig punt is. Laat hiertoe $a \in A$ en $b = f(a) \in B$. Omdat B open is, is b een inwendig punt van B, dus er bestaat een $\varepsilon > 0$ met $B_\varepsilon(b) \subset B$. Kies de bij ε horende δ uit de definitie van continuiteit. Dan $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(b)$ waardoor $B_\delta(a) \subset A = f^{-1}(B)$. Dit geldt voor elke $a \in A$, dus A is open.

Omgekeerd, als het inverse beeld van elke open verzameling open is, is te bewijzen dat f continu is in elk punt van X. Laat hiertoe $a \in X$ en $b = f(a)$, en zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is $B_\varepsilon(b)$ open in Y, dus $A = f^{-1}(B_\varepsilon(b))$ is open in X, en omdat $a \in A$, is er een $\delta > 0$ zo dat $B_\delta(a) \subset A$. Met deze δ is dan aan de uitspraak in de definitie van continuiteit voldaan. Q.e.d.

Tot nu toe hebben we gesproken over afbeeldingen $f: X \to Y$. Vaak worden afbeeldingen ook functies genoemd, met name in het geval dat $Y = \mathbb{R}$. We keren nu terug naar de vraagstelling in de inleiding.

Stelling 5.4. Laat $A \subset X$, en $f: A \to \mathbb{R}$ een continue functie. Als A rijkompakt is, dan heeft f een maximum in A.

Bewijs. Met dit bewijs waren we al begonnen in de inleiding. Dus laat $(x_n)_{n=1}^\infty$ de rij zijn waarvan de functiewaarden het supremum M van f op A benaderen, zoals precies gemaakt in de inleiding. Omdat A rijkompakt is, heeft deze rij een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ met limiet $a \in A$. Vanwege de continuiteit van f in a is de rij $(f(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$ convergent met limiet $f(a)$. Omdat een convergente rij begrensd is sluit dit de mogelijkheid $M = +\infty$ uit, zo dat

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

Dit impliceert dat de rij $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ convergeert naar M. Maar een deelrij convergeert naar $f(a)$. Dus $f(a) = M$. Q.e.d.

Stelling 5.5. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, en $f: A \to Y$ een continue afbeelding. Als A rijkompakt is in X, dan is het beeld van A onder f,

$$R(f) = \{f(a): \quad a \in A\},$$

rijkompakt in Y.

Bewijs. Opgave.

Definitie 5.6. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, en $f : A \to Y$ een afbeelding. Dan heet f *uniform continu in* A, als

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in A : \quad d(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Stelling 5.7. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, en $f : A \to Y$ een continue afbeelding. Als A rijkompakt is in X, dan is f uniform continu in A.

Bewijs. Stel niet, dan

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in A : \quad d(x, y) < \delta \ \text{ en } \ d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Kies $\delta = \frac{1}{n}$ en laat x_n en y_n de bijbehorende x en y zijn zoals in de regel hierboven. Omdat A rijkompakt is heeft de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, zeg met limiet $a \in A$. Dan is ook de rij $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergent met dezelfde limiet. (Waarom?) Maar nu geldt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(a),$$

terwijl $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$, tegenspraak. Q.e.d.

6. Het geval $X = \mathbb{R}$ en $X = \mathbb{R}^N$. We hebben gezien dat rijkompakte deelverzamelingen van X altijd gesloten en begrensd zijn. Als $X = \mathbb{R}$, geldt ook het omgekeerde. We laten dit eerst zien voor een gesloten begrensd interval.

Stelling 6.1. (Heine-Borel) Laat $a, b \in \mathbb{R}$. Dan is het gesloten begrensde interval

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b\}$$

rijkompakt.

Bewijs. Laat $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij zijn in $[a, b]$. We moeten bewijzen dat deze rij een convergente deelrij heeft met limiet in $[a, b]$. We delen hiertoe het interval in twee gelijke stukken, d.w.z. in

$$[a, \frac{a+b}{2}] \ \text{ en } \ [\frac{a+b}{2}, b].$$

Dan bevat tenminste één van deze twee intervallen voor oneindig veel waarden van n het rijelement x_n. Als we dit interval $[a_1, b_1]$ noemen, kunnen we dus een deelrij van $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ kiezen die volledig bevat is in $[a_1, b_1]$. Noteer deze rij als $(x_n^1)_{n=1}^{\infty}$. Dit argument herhalende, krijgen we een dalende rij intervallen

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots,$$

en bijbehorende steeds verdere deelrijen, genoteerd als $(x_n^j)_{n=1}^{\infty}$, met dezelfde eigenschap, namenlijk dat elke deelrij $(x_n^j)_{n=1}^{\infty}$ steeds volledig bevat is in $[a_j, b_j]$.

Vervolgens nemen we de zogenaamde diagonaalrij, dat is de rij $(x_n^n)_{n=1}^\infty$. Dit is zelf weer een deelrij van de oorspronkelijke rij $(x_n)_{n=1}^\infty$, en er geldt dat $x_n^n \in [a_n, b_n]$.

Nu is $(a_n)_{n=1}^\infty$ een begrensde niet-dalende rij getallen, en $(b_n)_{n=1}^\infty$ een begrensde niet-stijgende rij getallen. Dus bestaan

$$\alpha = \sup_n a_n \quad \text{en} \quad \beta = \inf_n b_n,$$

$$a \leq \alpha \leq \beta \leq b, \quad \text{en} \quad \alpha, \beta \in [a_n, b_n] \quad \text{voor elk natuurlijk getal } n.$$

Bovendien is $|\beta - \alpha| \leq b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$ voor elk natuurlijk getal n, dus $\alpha = \beta$.

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een n_ε zodat

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq \alpha = \beta \leq b_{n_\varepsilon} < \beta + \varepsilon.$$

Maar dan geldt voor elke $n \geq n_\varepsilon$ dat

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq x_n^n \leq b_n \leq b_{n_\varepsilon} < \beta + \varepsilon.$$

Dus

$$x_n^n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon), \text{ m.a.w. } |x_n^n - \alpha| < \varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig was betekent dit dat de (deel)rij $(x_n^n)_{n=1}^\infty$ convergent is met limiet $\alpha \in [a, b]$. Q.e.d.

Gevolg 6.2. (Bolzano-Weierstrass) Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

Stelling 6.3. Laat $A \subset \mathbb{R}$. Dan geldt

$$A \text{ is rijkompakt} \iff A \text{ is gesloten en begrensd.}$$

Bewijs. Opgave.

Stelling 6.4. Laat A een gesloten begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn. Als $f : A \to \mathbb{R}$ een continue functie is, dan heeft f een maximum in A.

Bewijs. Opgave.

Stelling 6.5. Iedere Cauchyrij in $\mathbb{R}$ is convergent (m.a.w. $\mathbb{R}$ is volledig).

Bewijs. Opgave.

Stelling 6.6. (absoluut convergente reeksen zijn convergent) Als $(a_n)_{n=1}^\infty$ een rij is in $\mathbb{R}$, en

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k |a_n|$$

bestaat, dan bestaat ook

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k a_n.$$

Bewijs. Opgave. Hint: laat zien dat de rij $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, gedefinieerd door

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n,$$

een Cauchyrij is.

De laatste vijf stellingen gelden ook voor de metrische ruimte

$$\mathbb{R}^N = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) : \; x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{R}\}, \quad (N \in \mathbb{N})$$

met de standaard Euclidische metriek

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}.$$

Dit kunnen we inzien door $\mathbb{R}^N$ op te vatten als het herhaald Cartesisch produkt van $\mathbb{R}$ met zich zelf. Echter, de produktmetriek zoals gedefinieerd in Sectie 3, is niet de Euclidische metriek, maar

$$d_{prod}(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_N - y_N|.$$

Opgave 6.7. Laat zien dat deze twee metrieken equivalent zijn, en bewijs Stelling 6.2 tot en met 6.6 voor $\mathbb{R}^N$.

Appendix. Kompaktheid en rijkompaktheid.

Definitie. Laat $A \subset X$.
(i) Een door een verzameling I geindexeerde collectie (open) deelverzamelingen $\{O_i : \; i \in I\}$ van X heet een *(open) overdekking* van A als

$$A \;\subset\; \cup_{i \in I} O_i.$$

(ii) Als iedere open overdekking $\{O_i : \; i \in I\}$ van A een eindige deeloverdekking van A bevat, d.w.z.

$$\exists i_1, i_2, \ldots, i_m \in I : \quad A \;\subset\; \cup_{j=1,2,\ldots,m} O_{i_j},$$

dan heet A *kompakt* .

Stelling. Laat $A \subset X$. Dan

$$A \text{ is kompakt} \iff A \text{ is rijkompakt.}$$

Bewijs. ($\Rightarrow$). Stel A is kompakt en laat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en rij zijn in A. We moeten bewijzen dat A een convergente deelrij met limiet in A heeft. Stel niet, dan is er voor elke $p \in A$ een $\varepsilon_p > 0$ en een n_p zodanig dat $a_n \notin B_{\varepsilon_p}(p)$ voor alle $n > n_p$. Neem nu als open overdekking van A de zojuist gevonden open bollen, dus

$$\{B_{\varepsilon_p}(p) : \; p \in A\}.$$

Omdat A kompakt is heeft deze overdekking een eindige deeloverdekking, dus er zijn $p_1, p_2, \ldots, p_m$ in A zodat

$$A \subset B_{\varepsilon_{p_1}}(p_1) \cup B_{\varepsilon_{p_2}}(p_2) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_{p_m}}(p_m),$$

waardoor A op zijn hoogst $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ punten van de rij kan bevatten, m.a.w. de rij bevat slechts eindig veel verschillende punten van A, en tenminste een punt moet dus oneindig vaak voorkomen. Dus kunnen we een deelrij maken waarin dit punt alleen maar voorkomt, en dit is dan de gezochte deelrij.

($\Leftarrow$) Dit heeft wat meer voeten in de aarde. Daartoe eerst het volgende.

Definitie. Laat A een deelverzameling zijn van een metrische ruimte X. Dan heet A *aftelbaar kompakt* als voor elke rij open verzamelingen $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ met

$$A \subset \cup_{n=1}^{\infty} O_n,$$

er een index k is zo dat

$$A \subset \cup_{n=1}^{k} O_n.$$

Stelling. Als $A \subset X$ rijkompakt is, dan is A aftelbaar kompakt.

Bewijs. Neem aan dat A rijkompakt is maar niet aftelbaar kompakt. Dan is er een rij open verzamelingen $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ van A die A geheel bedekt, en die geen eindige deeloverdekking heeft. Dat betekent dat er voor elk natuurlijk getal k een punt p_k in A is met

$$p_k \notin \cup_{n=1}^{k} O_n.$$

Omdat A rijkompakt is heeft de rij $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij met limiet p in A. Dus moet er een m zijn waarvoor $p \in O_m$. Omdat O_m open is zijn er dus oneindig veel punten van de rij $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ die in O_m liggen. Voor $n > m$ is dit in tegenspraak met de keuze van p_n. Q.e.d.

Definitie. Laat A een deelverzameling zijn van een metrische ruimte X. Dan heet A *totaal begrensd* als er voor elke $\varepsilon > 0$ een eindige deelverzameling $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ van A bestaat met

$$A \subset B_{\varepsilon}(p_1) \cup B_{\varepsilon}(p_2) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon}(p_n).$$

Stelling. Als $A \subset X$ rijkompakt is, dan is A totaal begrensd.

Bewijs. Stel A is niet totaal begrensd. Dan is er een $\varepsilon > 0$ waarvoor geen eindige verzameling als in de definitie kan worden gevonden. Kies nu $p_1 \in A$. Inductief kiezen we nu voor $n = 1, 2, \ldots$ een punt $p_{n+1} \in A$ met de eigenschap dat

$$p_{n+1} \notin B_{\varepsilon}(p_1) \cup B_{\varepsilon}(p_2) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon}(p_n).$$

Maar dan is $d(p_i, p_j) \geq \varepsilon$ voor alle $i \neq j$. Dus de rij $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ kan geen convergente deelrij hebben, in tegenspraak met de rijkompaktheid van A. Q.e.d.

Definitie. Een metrische ruimte X heet *separabel* als er een rij is in X zo dat elk punt van X een limietpunt is van deze rij.

Stelling. Als $A \subset X$ totaal begrensd is, dan is A separabel.

Bewijs. Voor elke k bestaat er een eindige deelverzameling A_k van A zo dat elk punt van A dichter dan $\frac{1}{k}$ bij een punt van A_k ligt. Maak nu een rij door eerst de elementen van A_1 te kiezen, dan de elementen van A_2, A_3, enzovoort. Dan is elk punt van A een limietpunt van de aldus verkregen rij. Q.e.d.

Stelling. Als $A \subset X$ separabel is, dan heeft elke open overdekking van A een aftelbare deeloverdekking.

Bewijs. Laat $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij zijn in A met de eigenschap dat elk punt van A limietpunt is van deze rij, en laat $\{O_i : \ i \in I\}$ een open overdekking zijn van A. Dan is elk punt p in A bevat in een O_i. Kies nu een natuurlijk getal m zo groot dat $B_{\frac{2}{m}}(p) \subset O_i$, en daarna een n zo dat $d(p_n, p) < \frac{1}{m}$. Dan is

$$p \in B_{\frac{1}{m}}(p_n) \subset O_i.$$

Laat J de verzameling zijn van de paren natuurlijke getallen (m, n) die we zo tegenkomen als p de verzameling A doorloopt. Dan is J aftelbaar en

$$A \subset \cup_{(m,n)\in J} B_{\frac{1}{m}}(p_n).$$

Maar voor elke $(m, n) \in J$ is er tenminste één O_i die $B_{\frac{1}{m}}(p_n)$ bevat. Kies er voor elke $(m, n) \in J$ precies één. Dit geeft een aftelbare deelcollectie die A overdekt. Q.e.d.

Uit bovenstaande stellingen volgt dat als $A \subset X$ rijkompakt is, dat A ook "gewoon" kompakt is.

Leiden, juni 1993.