

Tentamenopgaven Inleiding PDV

1. Bereken

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

met behulp van een Fourierreeks van een geschikt gekozen functie.

2. De warmtevergelijking

$$u_t = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

voor $u = u(x, y, t)$ heeft oplossingen van de vorm

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} F\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Leid een tweede orde differentiaalvergelijking af voor F als functie van $\eta = \frac{r}{\sqrt{t}}$. Deze differentiaalvergelijking heeft een integrerende factor. Bepaal een positieve oplossing $F(\eta)$ die zo is dat de daarmee gedefinieerde $u(x, y, t)$ voldoet aan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) dx dy = 1,$$

en beschrijf het gedrag van de oplossing als $t \downarrow 0$.

3. Laat $u(x, y)$ twee keer continu differentieerbaar zijn en harmonisch op een open samenhangende verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en neem aan dat $D_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R\} \subset \Omega$. Pas de divergentiestelling toe op ∇u en D_r met $r \leq R$ en herschrijf de zo verkregen randintegraal (die nul is) als een integraal naar ϕ waarbij ϕ loopt van 0 tot 2π . In deze integraal staat een afgeleide onder de integraal. Verwissel op de juiste manier afgeleide en integraal en leid af dat het gemiddelde van u over de rand van D_r niet van r afhangt. Leg uit waarom het gemiddelde van u over D_R gelijk is aan $u(0, 0)$. Bewijs/leg uit dat u geen globale extrema kan hebben op Ω tenzij u constant is. Geldt deze stelling ook voor harmonische functies op een open samenhangende verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^3$? Waarom?

4. Op het college is afgeleid dat de oplossing van $\Delta u = 0$ op $B = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ die voldoet aan $u(x) = \phi(x)$ voor $x \in \delta B = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ wordt gegeven door

$$u(y) = \frac{1 - |y|^2}{n\omega_n} \int_{\delta B} \frac{\phi(x)}{|x - y|^n} dS(x) \quad (y \in B).$$

Hier is $n\omega_n$ de $(n - 1)$ -dimensionale maat van δB . Neem aan dat $\phi : \delta B \rightarrow \mathbb{R}$ continu is en laat $x_0 \in \delta B$. Bewijs dat $u(y) \rightarrow \phi(x_0)$ als $B \ni y \rightarrow x_0$. Hint: je mag gebruiken dat de formule de juiste oplossing produceert als $\phi(x) \equiv 1$ op δB .

5. Gebruik de eigenwaarden λ_n en bijbehorende eigenfuncties ϕ_n van de Laplaciaan met randvoorwaarde $\phi_n = 0$ op een begreind gebied Ω om in Ω de vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta \Delta u = 0,$$

met randvoorwaarden $u = \Delta u = 0$ op $\partial\Omega$ op te lossen voor $t > 0$ met behulp van scheiding van variabelen voor gegeven beginfunctie

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

6. Waarom zijn de PDV in Opgave 5 en ook de warmtevergelijking niet oplosbaar voor $t < 0$ voor gegeven $u(x, 0)$, behalve in hele speciale gevallen? Wat zijn die speciale gevallen?
7. De (eigenwaarden λ en bijbehorende) eigenfuncties ϕ van de Laplaciaan met randvoorwaarde $\phi = 0$ op de disk $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ zijn uit te rekenen met behulp van (nulpunten van) Besselfuncties. Bepaal een eigenfunctie met een nulverzameling die de disk in 4 stukken verdeelt. Licht de berekeningen duidelijk toe, ook met een schets van de nulverzameling.
8. Gebruik net als in Opgave 5 de eigenwaarden λ_n en bijbehorende eigenfuncties ϕ_n van de Laplaciaan met randvoorwaarde $\phi_n = 0$ om de trillingen van een membraan Ω te beschrijven met behulp van de gedempte golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

waarin $\epsilon > 0$ een wrijvingscoëfficiënt is. Welke eigenfuncties trillen en welke niet (afhankelijk van ϵ)?

9. (a) Voor elke continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kan de (unieke) oplossing $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ van $-u''(x) = f(x)$ die voldoet aan $u(0) = u(1) = 0$ worden bepaald door twee keer te integreren en de beide randvoorwaarden te gebruiken. Laat zien dat dit leidt tot

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy,$$

waarbij $G(x, y)$ gedefinieerd is door $G(x, y) = x(1 - y)$ voor $0 \leq x \leq y$ en door $G(x, y) = y(1 - x)$ voor $y \leq x \leq 1$. Hint: je kunt van de dubbele integraal een enkele integraal maken door de volgorde van integreren om te draaien. Let op de grenzen.

- (b) We noemen de functie $x \rightarrow G(x, y)$ nu even u . Laat zien dat de functie $u : x \rightarrow G(x, y)$ in Opgave 9a voldoet aan

$$-u''(x) = \delta(x - y)$$

in distributie zin. Merk daarna op dat de functie voldoet aan de randvoorwaarden $u(0) = u(1) = 0$.

- (c) Opgave 9b gaan we nu na doen voor $-u''(x) = f(x)$ met randvoorwaarden $u'(0) - u(0) = u'(1) + u(1) = 0$. Bepaal de formule voor $G(x, y)$ waarmee geldt dat

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy.$$

Verifieer ook dat $G(x, y) = G(y, x)$. Hint: Los $-u''(x) = \delta(x - y)$ op met randvoorwaarden $u'(0) - u(0) = u'(1) + u(1) = 0$.

- (d) Laat zien dat er een inproduct $((\cdot, \cdot))$ bestaat zo dat de oplossing u van $-u''(x) = f(x)$ met randvoorwaarden $u'(0) - u(0) = u'(1) + u(1) = 0$ in Opgave 9c voldoet aan

$$((u, v)) = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

voor alle continu differentieerbare $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (e) Voor de oplossing u van $-u''(x) = f(x)$ met randvoorwaarden $u'(0) - u(0) = u'(1) + u(1) = 0$ in Opgave 9c schrijven we $u = Af$. Laat zien dat voor continue $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_0^1 ((Af)(x))g(x)dx = \int_0^1 f(x)((Ag)(x))dx,$$

en ook dat $((Af, g)) = ((f, Ag))$. Hint: met de oplossing u bij rechterlid f en v bij rechterlid g heb je 4 functies waarmee je de vergelijkingen kunt vermenigvuldigen en (partieel) integreren.

10. (a) Laat zien dat er een inproduct $((\cdot, \cdot))$ bestaat zo dat de oplossing u van $u''''(x) = f(x)$ met randvoorwaarden $u'(0) = u(0) = u'(1) = u(1) = 0$ in Opgave 9c voldoet aan

$$((u, v)) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

voor alle twee keer continu differentieerbare $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ met $v'(0) = v(0) = v'(1) = v(1) = 0$.

- (b) Als de vier keer continu differentieerbare functie u voldoet aan

$$\int_0^1 (u(x)v(x) + u''(x)v''(x))dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

voor alle twee keer continu differentieerbare $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, van welke differentiaalvergelijking met welke randvoorwaarden is u dan de oplossing?

- (c) Vervang in Opgaven 9a, 9c en 10a het rechterlid f door λu . Op het college is besproken waarom in het geval van Opgave 9a dit leidt tot een rij eigenwaarden λ_n . Ook in het geval van Opgaven 9c en 10a is dit het geval, omdat dezelfde spectraal stelling toepasbaar is. Die eigenwaarden kun je ook uitrekenen, of althans, je kunt een vergelijking vinden waar het de oplossingen van zijn. Dat doen we nu eerst voor het probleem uit Opgave 9c en het is leuk (nou ja) om hier een parameter $\varepsilon \geq 0$ in te stoppen. Dus we bekijken het eigenwaarden probleem

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad \varepsilon u'(0) - u(0) = 0 = \varepsilon u'(1) + u(1).$$

Waarom verwacht je alleen positieve λ ?

Om de eigenwaarden te bepalen stellen we $\lambda = \mu^2$. Bepaal 1 oplossing van $u'' + \mu^2 u = 0$ die voldoet aan $\varepsilon u'(0) = u(0)$ en eis dat die ook voldoet aan de andere randvoorwaarde. Dit geeft een vergelijking voor μ waarin ε als parameter voorkomt. Voor $\varepsilon = 0$ weet je wat de oplossingen μ zijn. Geef met een schets aan wat de oplossingen zijn voor kleine positieve ε .

11. In deze opgave bespreken we de Finite Element Method voor het oplossen $-\Delta u = 1$ op een gelijkzijdige driehoek Ω in $\mathbb{R}^2$ (met zijde van lengte $\sqrt{2}$) met randvoorwaarde $u = 0$. Daarvoor verdelen we driehoek in gelijke kleinere gelijkzijdige driehoekjes. We leggen hiertoe de driehoek in $\mathbb{R}^3$ (met coördinaten x, y, z) op zo'n manier dat de driehoek gegeven wordt door

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1.$$

Voor een gegeven positieve gehele N nemen we als roosterpunten alle punten die zo corresponderen met coördinaten $(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}, \frac{k}{N})$, met positieve gehele i, j, k , waarvoor $i + j + k = N$. Voor elke van deze roosterpunten (die niet op de rand liggen) introduceren we een stuksgewijs lineaire continue functie ϕ_{ijk} die lineair is op elk driehoekje van het rooster, 1 is in het punt P_{ijk} dat correspondeert met $(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}, \frac{k}{N})$ en 0 in alle andere roosterpunten. Dan is $\nabla \phi_{ijk}$ een stuksgewijs constante vector (niet continu). We zoeken een numerieke oplossing van de vorm

$$u = \sum_{\substack{i,j,k > 0 \\ i+j+k=N}} u_{ijk} \phi_{ijk}.$$

Deze moet voldoen aan de zwakke formulering

$$\int_{\Omega} \nabla u_N \nabla \phi_{lmn} = \int_{\Omega} \phi_{lmn}$$

voor alle $l, m, n > 0$ met $l + m + n = N$. Bereken alle mogelijke

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_{ijk} \nabla \phi_{lmn} \quad \text{en} \quad \int_{\Omega} \phi_{lmn}$$

en schrijf de vergelijkingen op voor de coëfficiënten u_{ijk} (neem $u_{ijk} = 0$ als $ijk = 0$). Breng deze vergelijkingen in verband met een random walk over het grid en relateer de oplossing u_{ijk} aan het verwachte aantal stappen om de rand te bereiken van een random walk die begint in P_{ijk} . Los de vergelijkingen numeriek of exact op voor $N = 3$ en $N = 4$. Hint: maak gebruik van de te verwachten symmetrie.