

Inleiding PDV proeftentamen (401023/400163)

Geen formulebladen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0),$$

geen rekenmachines. Werk netjes, geef uitleg bij wat je doet. Succes!

1. Laat $G = G(x, t, z, p)$ een functie van 4 variabelen zijn. Voor $u = u(x, t)$ is op het college behandeld hoe oplossingen van $u_t + G(x, t, u, u_x) = 0$ langs krommen van de vorm $x = x(t)$ kunnen worden gemaakt door de gewone differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x} = G_p, \quad \dot{p} = -G_x - pG_z, \quad \dot{z} = pG_p - G, \quad (1)$$

voor $p(t) = u_x(x(t), t)$ en $z(t) = u(x(t), t)$ op te lossen. Beschouwen we een beginwaardeprobleem van de vorm

$$u_t + G(x, t, u, u_x) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0), \quad (2)$$

dan moeten daartoe beginwaarden

$$x(0) = \xi, \quad p(0) = p_0 = u'_0(\xi), \quad z(0) = z_0 = u_0(\xi)$$

genomen worden, met $\xi \in \mathbb{R}$ als parameter.

We bekijken nu het speciale geval dat $G(x, t, z, p) = c(t)p + \lambda(t)z$, dus

$$u_t + c(t)u_x + \lambda(t)u = 0. \quad (3)$$

- (a) Bepaal de differentiaalvergelijkingen voor $x(t), p(t), z(t)$ en los ze op voor gegeven ξ, p_0 en z_0 (in de antwoorden komen integralen van c en λ voor).
- (b) Bepaal een coördinatentransformatie van de vorm

$$\xi = x + f(t), \quad \tau = t,$$

waarmee de PDV voor $u(x, t)$ verandert in

$$v_\tau + \lambda(\tau)v = 0.$$

voor $v(\xi, \tau) = u(x, t)$. Druk daartoe eerst u_t en u_x uit in v_τ en v_ξ .

- (c) Bepaal de oplossing van

$$u_t + t^2 u_x + tu = 0.$$

die voldoet aan $u(x, 0) = e^{-x^2}$.

2. De warmtevergelijking

$$u_t = u_{xx}$$

heeft oplossingen van de vorm

$$u(x, t) = f(y), \quad y = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

- (a) Aan welke gewone differentiaalvergelijking voldoet $f(y)$? Geef een afleiding.
- (b) $u(x, t)$ is een oplossing van deze vorm die gelijk is aan 0 op de positieve t -as en gelijk aan 1 op de positieve x -as. Bepaal $f(0)$ en $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y)$ en geef een formule voor $f(y)$.
3. Beschouw voor $u = u(x, t)$, zonder restricties op x en t , de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

De oplossing met beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

wordt gegeven door $u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t))$.

- (a) Neem aan dat f een 2π -periodieke oneven functie is met $f(x) = 1$ (waarbij $0 < x < \pi$) en $f(0) = f(\pi) = 0$. Schets de grafiek van f en geef met een schets in het (x, t) -vlak aan waar de bijbehorende oplossing $u(x, t)$ gelijk is aan 0.
- (b) Deze oplossing $u(x, t)$ voldoet aan $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ en is ook te schrijven als

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin(kx)$$

Bepaal $C_k(t)$ voor $k = 1, 2, \dots$

4. Laat $\beta > 0$. Voor $u = u(x, t)$ wordt de gedempte golfvergelijking gegeven door

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Met de randvoorwaarden $u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0$ heeft deze PDV oplossingen van de vorm $u(x, t) = T(t)X(x)$ (scheiding van variabelen).

- (a) Aan welke randvoorwaarden moet $X(x)$ voldoen in $x = 0$ en $x = \frac{\pi}{2}$?
- (b) Leid een tweede orde differentiaalvergelijking voor $X(x)$ af waarin een parameter λ voorkomt.

- (c) Bepaal alle λ waarvoor het randwaardeprobleem voor $X(x)$ dat je in de vorige twee onderdelen hebt afgeleid niet-triviale oplossingen heeft. Nummer deze als $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$
- (d) Voor elke gehele $n \geq 1$ is er bij λ_n een oplossing $X(x) = \phi_n(x)$ met

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\phi_n(x))^2 dx = 1.$$

Laat zien dat $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0$ als $m \neq n$. Hint: vermenigvuldig de differentiaalvergelijking voor $\phi_n(x)$ met $\phi_m(x)$ en integreer partieel.

- (e) Zij $n \geq 1$. Laat zien dat (4) oplossingen heeft van de vorm

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) \phi_k(x)$$

die voldoen aan $u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0$ en bepaal gewone differentiaalvergelijkingen voor $C_k(t)$.

- (f) De differentiaalvergelijking voor $C_k(t)$ is een tweede orde vergelijking met constante coëfficiënten waarin β en k voorkomen. Voor welke β zijn er positieve oplossingen van (4) die voldoen aan de randvoorwaarden $u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0$? Welke oplossingen zijn dat?
- (g) De warmtevergelijking

$$u_t = u_{xx}$$

heeft oplossingen van de vorm

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \phi_k(x)$$

die voldoen aan $u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0$. Bereken $C_k(0)$ voor $k = 1, 2, \dots$ als

$$u(x, 0) = \frac{\pi}{2} - x.$$

en bepaal $C_k(t)$ voor $k = 1, 2, \dots$

Antwoorden (geen uitwerkingen)/ toelichting.

1. (a) DV's: $\dot{x} = c$, $\dot{z} = -\lambda z$, $\dot{p} = -\lambda p$.
Oplossingen: $x(t) = \xi + \int_0^t c(s) ds$,
 $z(t) = z_0 \exp(-\int_0^t \lambda(s) ds)$, $p(t) = p_0 \exp(-\int_0^t \lambda(s) ds)$
- (b) $\xi = x + f(t)$, $\tau = t$, dus

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d}{dt} = f'(t) \frac{d}{d\xi} + \frac{d}{d\tau},$$

dus $u_x = v_\xi$, $u_t = f'(\tau) v_\xi + v_\tau$, kies $f' = -c$, dus $\xi = x - \int_0^t c(s) ds$.

$$(c) \quad x(t) = \xi + \frac{t^3}{3}, \quad z(t) = z_0 \exp(-\frac{t^2}{2}), \quad p(t) = p_0 \exp(-\frac{t^2}{2}), \\ u(\xi + \frac{t^3}{3}, t) = \exp(-\xi^2) \exp(-\frac{t^2}{2}),$$

$$u(x, t) = e^{-(x - \frac{t^3}{3})^2 - \frac{t^2}{2}}$$

$$2. \quad (a) \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = f'(y) \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{1}{2} x t^{-\frac{3}{2}} f'(y) \\ u_x = f'(y) \frac{\partial y}{\partial x} = f'(y) t^{-\frac{1}{2}} \\ u_{xx} = f''(y) t^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} = f''(y) t^{-1} \\ -\frac{1}{2} x t^{-\frac{3}{2}} f'(y) = f''(y) t^{-1}, \text{ dus } f''(y) = -\frac{1}{2} x t^{-\frac{1}{2}} f'(y) = -\frac{1}{2} y f'(y):$$

$$f''(y) + \frac{1}{2} y f'(y) = 0$$

$$(b) \quad t > 0: 0 = u(0, t) = f(0) \\ x > 0: 1 = u(x, 0) = \lim_{t \downarrow 0} f(\frac{x}{\sqrt{t}}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y). \\ \text{Met integrerende factor}$$

$$(e^{\frac{1}{4}y^2} (f'(y)))' = e^{\frac{1}{4}y^2} (f''(y) + \frac{1}{2} y f'(y)) = 0$$

$$e^{\frac{1}{4}y^2} (f'(y)) = f'(0),$$

$$f(y) = f'(0) \int_0^y e^{-\frac{1}{4}s^2} ds$$

$$1 = f(\infty) = f'(0) \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}s^2} ds = \frac{1}{2} f'(0) \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{4}s^2} ds = \frac{1}{2} \sqrt{4\pi} f'(0) = \sqrt{\pi} f'(0),$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\frac{1}{4}s^2} ds$$

3. (a) Je vindt een vlakverdeling met lijnen $x \pm t = k\pi$, k geheel, en in de vakjes 1, -1 en 0. Door teruglopen van (x, t) naar $x - t$ en $x + t$ zie je wat wat is.
- (b) (scheiding van variabelen $T(t)X(x)$ met $X(x)$ als gegeven)

$$C_k'' + k^2 C_k = 0, \quad C_k(0) = \frac{\int_0^\pi u(x, 0) \sin kx dx}{\int_0^\pi \sin^2 kx dx}, \quad C_k'(0) = 0$$

$$C_k(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx dx = \frac{4}{k\pi} \quad \text{als } k \text{ oneven}, \quad C_k(0) = 0 \quad \text{als } k \text{ even}$$

$$C_k(t) = C_k(0) \cos kx = \frac{4 \cos kx}{k\pi} \quad \text{als } k \text{ oneven}, \quad C_k(t) = 0 \quad \text{als } k \text{ even}$$

4. Je krijgt cosinussen voor $X(x)$ die nul moeten zijn in $x = \frac{\pi}{2}$. Dus

$$\phi_1(x) = \cos x, \quad \phi_2(x) = \cos 3x, \quad \phi_3(x) = \cos 5x, \dots$$

Integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_n(x) \phi_m(x) dx$$

via de hint. Oplossingen $C_k(t) \cos(1+2k)x$ moeten voldoen aan

$$C_k'' + \beta C_k' + (1+2k)^2 C_k = 0$$

Alleen $k = 0$ kan een positieve oplossing geven (alleen $\cos x$ is positief).
Wat moet je dus eisen van β ?

Bij de warmtevergelijking

$$C_k(0) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \cos(1+2k)x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(1+2k)x dx}$$

Noemer makkelijk, teller partieel integreren. Niet moeilijk.