

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Inleiding PDV (401023/400163)
Afdeling Wiskunde	29-3-2012
Vrije Universiteit	15.15-17.15 uur

Geen formulebladen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0),$$

geen rekenmachines. Geef uitleg bij wat je doet. Succes!

Normering. 2 punten voor som 2, alle andere onderdelen 1 punt. Totaal 10.

1. Laat $G = G(x, t, z, p)$ een functie van 4 variabelen zijn. Voor $u = u(x, t)$ is op het college behandeld hoe oplossingen van $u_t + G(x, t, u, u_x) = 0$ langs krommen van de vorm $x = x(t)$ kunnen worden gemaakt door de gewone differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x} = G_p, \quad \dot{p} = -G_x - pG_z, \quad \dot{z} = pG_p - G, \quad (1)$$

voor $p(t) = u_x(x(t), t)$ en $z(t) = u(x(t), t)$ op te lossen. Beschouwen we een beginwaardeprobleem van de vorm

$$u_t + G(x, t, u, u_x) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0), \quad (2)$$

dan moeten daartoe beginwaarden

$$x(0) = \xi, \quad p(0) = p_0 = u'_0(\xi), \quad z(0) = z_0 = u_0(\xi)$$

genomen worden, met $\xi \in \mathbb{R}$ als parameter.

- (a) Bepaal de oplossing van

$$u_t + tu_x + u = 0, \quad u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$$

- (b) Bepaal de oplossing van

$$u_t + xu_x + u = 0, \quad u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$$

2. De oplossing van de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

met beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

wordt gegeven door $u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t))$. Bepaal de oplossing als

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

en leg uit waarom de oplossing na verloop van tijd een lokaal minimum heeft in $x = 0$.

3. De warmtevergelijking

$$u_t = u_{xx}$$

heeft oplossingen van de vorm

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f(y), \quad y = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad t > 0.$$

(a) Laat zien dat $f(y)$ voldoet aan

$$f''(y) + \frac{1}{2}(yf'(y)) = 0$$

(b) $u(x, t)$ is een oplossing van deze vorm met $u_x = 0$ op de positieve t -as. Aan welke eerste orde differentiaalvergelijking voldoet $f(y)$? Bepaal de oplossing waarvoor $\int_0^\infty f(y)dy = 1$.

4. Laat $\alpha \in \mathbb{R}$. Beschouw voor $u = u(x, t)$ de vergelijking gegeven door

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

voor $0 < x < 1$. Met de randvoorwaarden $u(0, t) = u(1, t) = 0$ heeft deze PDV oplossingen van de vorm $u(x, t) = T(t)X(x)$.

(a) Leid een randwaarde probleem af voor $X(x)$ waarin een parameter λ voorkomt en bepaal alle λ waarvoor dit randwaardeprobleem niet-triviale oplossingen heeft. Nummer deze als $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$

(b) Voor elke gehele $n \geq 1$ is er bij λ_n een oplossing $X(x) = \phi_n(x)$ met

$$\int_0^1 (\phi_n(x))^2 dx = 1.$$

Laat zien dat $\int_0^1 \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0$ als $m \neq n$.

(c) De PDV (3) heeft oplossingen van de vorm

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)\phi_k(x)$$

die voldoen aan $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Bepaal gewone differentiaalvergelijkingen voor $C_k(t)$. Leg uit waarom er voor elke $\alpha > 0$ oplossingen zijn die oscilleren als functie van de tijd.

(d) Laat $\alpha = 0$. Bereken $C_k(0)$ voor $k = 1, 2, \dots$ als

$$u(x, 0) = x.$$

en bepaal $C_k(t)$ voor $k = 1, 2, \dots$