0.1 Vraagstukken 4

1 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $f(x_1, x_2) = (x_1^4 x_2 + x_1, x_1 + x_2^3)$.

a) Toon aan dat f in een omgeving van $(1, 1)$ een inverse heeft.

b) Bereken de afgeleide van f^{-1} in $(2, 2)$.

2 Toon aan dat de kromme in $\mathbb{R}^2$ die gegeven wordt door de vergelijking $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ een horizontale raaklijn heeft in het punt $(2^{\frac{1}{3}}a, 4^{\frac{1}{3}}a)$.

3 Voor elke $x \in \mathbb{R}^3$ met $x_1 + x_2 + x_3 \neq -1$ definiëren we de functie $f(x)$ met waarden in $\mathbb{R}^3$ via $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ met

$$f_j(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_j}{1 + x_1 + x_2 + x_3}.$$

a) Bereken f' en laat zien dat in elk punt x met $x_1 + x_2 + x_3 \neq -1$ de functie f locaal inverteerbaar is.

b) Laat zien dat f ook globaal injectief is.

4 De afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$. Laat zien dat f lokaal inverteerbaar is in de omgeving van elk punt $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, maar dat f niet globaal injectief is.

5 Controleer voor $n = 3$ dat de 3-de orde term in de Stelling van Taylor gelijk is aan

$$\frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k).$$