0.1 Vraagstukken 6

1 Bepaal de extremen van de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x, y, z) = x^2 + y + z,$$

onder de nevenvoorwaarde

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

2 Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Bepaal de extremen van f onder de nevenvoorwaarden

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0 \\ g_2(x, y, z) = x + y + z = 0. \end{cases}$$

[Aanwijzing: beschouw de functie $\tilde{f} = 1/f$.]

3 Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Bepaal de extreme waarden van f onder de nevenvoorwaarde

$$g(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n - 1 = 0.$$

4 Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2$.

a Bepaal het globale maximum van f onder de nevenvoorwaarde

$$g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0.$$

b Leid hieruit af de ongelijkheid

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{1}$$

waarin a_i, $i = 1, \ldots, n$, positieve getallen zijn. Deze ongelijkheid zegt dat het meetkundig gemiddelde kleiner is dan, of gelijk is aan het rekenkundig gemiddelde.

c Bepaal onder welke voorwaarde er een gelijkheid is in (1).

5 Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(x, y, z) = x^2 + z^2$. Bepaal de extreme waarden van f onder de nevenvoorwaarden

$$g_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z = 0.$$

6 Bepaal de extreme waarden van de functie $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 7y_1 + 5y_2$, onder de nevenvoorwaarden

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 38$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = y_2.$$

[Aanwijzing: pas eerst een substitutie toe voordat je de methode van Euler-Lagrange gaat gebruiken.]

7 De verzameling $K \subset \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (y - x^2)(2y - x^2) = 0 \right\}.$$

Definieer vervolgens $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $f(x, y) = y$.

a Probeer met stap 1 van de methode van Euler-Lagrange de positie(s) van de mogelijke extremen van f op K te bepalen.

b Bepaal vervolgens het minimum van f op K.

8 Bereken in $\mathbb{R}^2$ de kortste afstand van de oorsprong tot de hyperbool met vergelijking $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$.

9 Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y, z) = x + zy$ en $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Bepaal de punten van B waar f een extreme waarde aanneemt.

10 Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y, z) = x(y + z)$ en $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ en } xz = 1\}$. Bepaal de extreme waarden van f op S.