Existentie en uniciteit van oplossingen

Onder bepaalde voorwaarden op f heeft de differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$ met beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$ in een omgeving van x_0 een unieke oplossing. Om zo een voorwaarde te geven introduceren we het volgende concept:

Definitie Een functie $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, waar E een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is voldoet aan een *Lipschitz conditie* met betrekking tot de tweede variabele als er een getal M is zo dat

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2|,$$

voor elk tweetal punten (x,y_1) en (x,y_2) in E.

Om een voorbeeld te geven: als f differentieerbaar is op E, en als de afgeleide van f uniform begrensd is op E (dat wil dus zeggen dat er een getal M is met $\|f'(x,y)\| \leq M$) dan voldoet f aan een Lipschitz conditie met betrekking tot de tweede variabele. Immers, de middelwaardestelling zegt in dat geval dat

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq M\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Als we dus $x_1 = x_2$ nemen dan volgt het gestelde eenvoudig.

We geven nu de stelling over het bestaan en de eenduidigheid van oplossingen van de differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$.

Stelling *Laat E een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ zijn, en neem aan dat $f : E \to \mathbb{R}$ een begrensde continue functie op E is die voldoet aan een Lipschitz conditie met betrekking tot de tweede variabele op E. Dan geldt voor elk punt $(x_0,y_0) \in E$ dat de differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$ met beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$ een unieke oplossing heeft in een omgeving van x_0.*

Anders gezegd, er is een $\delta > 0$ en een differentieerbare functie $\phi : [x_0 - \delta,\, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ zo dat $\phi(x_0) = y_0$, en $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ voor alle x met $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$.

Het cruciale punt in het bewijs van globale existentie en eenduidigheid in het boek is het feit dat deze δ niet van x_0 afhangt.

Opgaven

1. Zij $f(x,y) = \frac{4x^3y}{x^4+y^2}$ als $(x,y) \neq (0,0)$, en $f(0,0) = 0$.

a Ga na of f in een omgeving van $(0,0)$ voldoet aan een Lipschitz voorwaarde op de tweede variabele.

b Los de differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$ op. Aanwijzing: stel $u = \frac{1}{y}$, en gebruik dan dat $x^4u' + 4x + 3u = (x^4u)'$.

c Gaat er door het punt $(0,0)$ één oplossing, of gaan er door dat punt meerdere oplossingen?

2. Laat f een continue en begrensde functie zijn van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Er is dus een getal M met $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. We bekijken de differentiaalvergelijking $y' + y = f(x)$.

a Druk de oplossing van de differentiaalvergelijking uit in f met behulp van de methode van variatie van constanten.

b Laat zien dat er precies één oplossing is die begrensd is op heel $\mathbb{R}$, en dat die gegeven wordt door $y(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{t-x} f(t)\, dt$.

c Laat zien: als f periodiek is met periode T, dat wil dus zeggen $f(t) = f(t+T)$ voor alle t, dan is de unieke begrensde oplossing y die we in onderdeel b vonden ook periodiek met dezelfde periode.

d Laat zien: als $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ dan geldt voor elke oplossing $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

3. Los op met de methode van variatie van constanten.

a $x^2y' + 2xy = \sin x$

b $y' + \frac{y}{x} = e^{2x}$

c $y'' - y = e^{-x}$

d $y'' + 4y = 2\cos(2x)$