Tentamen Analyse II 22-12-2000

Lees eerst deze informatie zorgvuldig door. Dit tentamen komt namelijk in vier mogelijke verschijningsvormen. Je kunt hier maken:

- Deeltentamen 2 van Wiskundige Analyse II voor Econometristen. Dan maak je de opgaven 1, 2, 3, 4E en 5. Je hebt dan **twee** uur de tijd.
- Deeltentamen 2 van Wiskundige Analyse II voor Wiskundigen. Dan maak je de opgaven 1, 2, 3, 4W en 5. Je hebt dan **twee** uur de tijd.
- Het hele tentamen Wiskunde Analyse II voor Econometristen. Dan maak je de opgaven 1, 2, 3, 4E, 5, 6 en 7. Je hebt dan **drie** uur de tijd.
- Het hele tentamen Wiskunde Analyse II voor Wiskundigen. Dan maak je de opgaven 1, 2, 3, 4W, 5, 6 en 7. Je hebt dan **drie** uur de tijd.

De normering van de opgaven vind je op de laatste pagina van het tentamen.

Opgave 1

a. Zij $f(x,y) = \frac{y}{x}$. Ga na of $f(x,y)$ voldoet aan een Lipschitz-conditie in de variable y in een omgeving van de oorsprong.

b. Los de differentiaal vergelijking $y' = f(x,y)$ op.

c. Welke oplossingen gaan door de oorsprong? Leg uit waarom je het antwoord op deze vraag ook kunt gebruiken om onderdeel a. te beantwoorden.

Opgave 2

Los de volgende differentiaalvergelijkingen op

a. $y' + x^2 y = x^2$

b. $y'' + 3y' + 2y = 3\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)$

Opgave 3

Bekijk de tweede orde differentiaalvergelijking

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0.$$

Voer in $x(t) = y'(t)$.

a. Laat zien dat de vergelijking equivalent is met het stelsel

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y \\ y' &= x \end{aligned}$$

in de zin dat de tweede coördinaat van de oplossing van het stelsel een oplossing is van de tweede orde differentiaalvergelijking en omgekeerd.

b. Los het stelsel uit onderdeel a op.

Opgave 4W

Zij $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ continu en veronderstel dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f(nx)\, dx = L$.

Opgave 4E

a) Geef aan van welke functie $t \to y(t)$ de functie $(1+s)^{-2}$ de Laplace-getransformeerde is.

b) Bereken met behulp van de Laplace transformatie de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y' + y = e^{-t}$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 0$.

Opgave 5

a) Laat zien dat de Fourierreeks van $e^{|x|}$ op $(-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$e^{|x|} \sim \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{1 + k^2} e^{ikx}$$

b) Laat zien dat zelfs voor alle $x \in (-\pi, \pi]$ de Fourierreeks convergeert met limiet $e^{|x|}$, m.a.w. laat zien

$$e^{|x|} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{1 + k^2} e^{ikx}$$

c) Bereken

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{1 + k^2} \right)^2 .$$

Nota Bene: dit is het einde van het tweede deeltentamen!!

Opgave 6

Zij $f(x,y)$ gegeven door $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)^\alpha}$ voor $(x,y) \neq (0,0)$, en $f(0,0) = 0$.

a. Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ met behulp van de definitie.

b. Voor welke waarden van α is f continu in $(0,0)$?

c. Voor welke waarden van α is f differentieerbaar in $(0,0)$?

U mag bij de onderdelen b en c gebruik maken van het feit dat $\sin t \sim t$ voor $t \to 0$. Motiveer wel uw antwoorden.

Opgave 7

Zij $f(x,y) = (x^2+y^2-2)(x-y)$.

a. Schets het tekenverloop van f.

b. Wat kun je nu zeggen over de punten $(1,1)$ en $(-1,-1)$?

c. Bepaal de stationaire punten en de extremen van f.

Normering

1a:3	2a:3	3a:3	4W:6	4E a:3	5a:3	6a:3	7a:3
b:3	b:3	b:3		b:3	b:3	b:3	b:3
c:3					c:3	c:3	c:3

Cijfer deeltentamen 2 $= 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}$

Cijfer hele tentamen $= 1 + \frac{\text{aantal punten}}{6}$

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$
1	$\frac{1}{s},\quad s > 0$
$t^n,\, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2},\quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2},\quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2},\quad s > \lvert a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2},\quad s > \lvert a\rvert$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s},\quad s > 0$
$H_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$