

In dit college en een gedeelte van het vervolgclege in het tweede jaar behandelen we de theorie achter de differentiaal- en integraalrekening voor functies van één reële variabele waarmee de student eerder heeft kennisgemaakt op de middelbare school en het vak Calculus. Hiermee leggen we een basis voor de rest van de studie waar menig idee uit dit college zal terugkeren in een algemenere en vaak meer abstracte context. Hieronder bespreken we de belangrijkste onderwerpen en hun onderlinge samenhang vanuit een combinatie van historisch en persoonlijk perspectief.

Als we integraalrekening vrij vertalen als oppervlaktebepaling dan gaat het vak terug naar bijvoorbeeld de Griekse oudheid (Archimedes) met het bepalen van de oppervlakte π van een cirkelschijf met straal 1. Zoals we nu weten is

$$\pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

maar daarbij gebruiken we het verband tussen integraal- en differentiaalrekening (de hoofdstellingen van de integraalrekening). Zo berekenen we ook de oppervlakte van het deel van het xy vlak ingesloten tussen $y = 0$, $x = 1$ en $y = x^2$ als

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

een uitkomst ook al bekend in de Griekse oudheid, lang voor dat differentiaalrekening bestond.

Het getal $\frac{1}{3}$ noemen we rationaal: het is het quotient van twee gehele getallen, ofwel een breuk. In dit college zullen we aannemen dat de student vertrouwd is met rationale getallen, die als verzameling aangeduid worden met $\mathbb{Q}$, en met het rekenen daarmee (zonder rekenmachine!). Het getal π echter is niet rationaal (Lambert, 18-de eeuw) en ook niet, zoals bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ wel, oplossing van een polynomiale vergelijking met gehele coëfficiënten (Lindemann, 19-de eeuw). Het getal $\sqrt{2}$, de positieve oplossing van de vergelijking

$$x^2 = 2,$$

kenden de Grieken (Pythagoras!) ook, en ze wisten dat het geen rationaal getal kon zijn (waarom?).

Goede benaderingen van $\sqrt{2}$ zijn al heel lang bekend. De Babyloniers benaderden $\sqrt{2}$ met het iteratieve proces

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad x_0 = 1,$$

hetgeen hetzelfde is als de methode van Newton (1642-1727) toegepast op de functie $x \rightarrow f(x) = x^2 - 2$. Deze methode is gebaseerd op het bepalen van de raaklijn aan de grafiek in het punt x_n , waaruit x_{n+1} bepaald wordt als snijpunt van die raaklijn met de x -as: x_{n+1} vinden we als oplossing van de vergelijking

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1}).$$

Hier zijn we aangeland bij de differentiaalrekening (Newton, Leibniz, 1646-1716), door Newton uitgevonden om de uit metingen bepaalde wetten van Kepler voor elliptische planeetbanen (Mars) uit te rekenen.

Differentiaalrekening gaat over lineaire benaderingen van functies, zodat we met begrippen als raaklijn aan een grafiek en snelheden van bewegende objecten kunnen werken. Dit leidt tot het begrip afgeleide (van een) functie, bedacht en gebruikt door Newton om de bewegingsvergelijkingen voor een zonnestelsel met één planeet als differentiaalvergelijkingen te formuleren en op te lossen.

Een voorbeeld van een differentiaalvergelijking is

$$f'(x) = f(x),$$

waarbij f de onbekende functie is die moet voldoen aan de vergelijking (voor elke waarde van de variabele x). Als we deze differentiaalvergelijking op proberen te lossen met als extra voorwaarde dat

$$f(0) = 1,$$

dan kunnen we dit doen door eerst de differentiaalvergelijking te integreren van 0 tot x (hierbij gebruikmakend van het verband tussen integreren en differentiëren), hetgeen oplevert dat

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(s)ds,$$

en daarna met op het eerste gezicht trial and error een oplossing te zoeken: is $f(x) = 1$ de oplossing? Vast niet, invullen in de integraalvergelijking hierboven geeft

$$1 \neq 1 + \int_0^x 1ds = 1 + x.$$

Is $f(x) = 1 + x$ dan de oplossing? Weer invullen geeft

$$1 + x \neq 1 + \int_0^x (1 + s)ds = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$

ook niet goed. Dan maar $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ proberen geeft

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 \neq 1 + \int_0^x (1 + s + \frac{1}{2}s^2)ds = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3,$$

weer niet goed, maar nu beginnen we een regelmaat te zien die leidt tot het vermoeden dat

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots,$$

en deze $f(x)$ voldoet, als we even niet stil staan bij de puntjes, aan zowel $f'(x) = f(x)$ (differentieer de formule maar naar x) als aan $f(0) = 1$ (vul maar $x = 0$ in). Kennelijk levert het iteratieve proces gedefinieerd door

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(s)ds \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad f_0(x) = 1,$$

een oplossing

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots$$

Deze manier voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen wordt Picard iteratie genoemd.

Op school en bij calculus hebben we gezien (voor zoete koek aangenomen) dat de oplossing van $f'(x) = f(x)$ die voldoet aan $f(0) = 1$ gegeven wordt door

$$f(x) = e^x = \exp(x),$$

maar wat is die e^x dan eigenlijk? We zullen zien dat inderdaad

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots,$$

net zoals

$$\sqrt{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{met} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad \text{en} \quad x_0 = 1.$$

Met deze voorbeelden raken we het hart van het vak analyse. Nieuwe getallen en functies zijn limieten van benaderingen gemaakt met bewerkingen die we al kennen. Het bepalen van de oppervlakte van een cirkelschijf met straal 1 is een ander voorbeeld. Lengte maal breedte als uitkomst voor een rechthoek is ons vertrouwd en daaruit halen we ook de oppervlakteformules voor driehoeken en algemener n -hoeken en dan, door benaderen, de oppervlakte van de cirkelschijf.

Alles dat we in de analyse doen is gebaseerd op benaderen en dus moeten we begrijpen wanneer een procedure voor het benaderen van een getal of een functie of wat dan ook zinvol is. Waaraan moet een rij (laten we beginnen met) getallen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

voldoen opdat we kunnen zeggen dat

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n?$$

De nu gangbare definitie is dat gegeven een kleine toegestane foutmarge, zeg $\frac{1}{k}$ met k zo groot als we willen, we, door alleen te eisen dat we ver genoeg in de rij zitten, zeg vanaf rangnummer $n = N$, x_n dicht bij x kunnen krijgen dan $\frac{1}{k}$. Precieser gezegd: voor elke keuze van een positief geheel getal m moet er een positief geheel getal N zijn zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|x_n - x| < \frac{1}{k}$. Gebruikmakend van een zuinige notatie schrijven we dit als:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \frac{1}{k}].$$

In deze formule moet “ $\forall$ ” gelezen worden als “voor alle”, “ $\in$ ” als “in”, “ $\mathbb{N}$ ” als de verzameling van positieve gehele getallen, i.e.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

“ $\exists$ ” als “bestaat er/er bestaat” en “ $\Rightarrow$ ” als “impliceert dat”. De implicatie $n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \frac{1}{k}$ (een als-dan uitspraak) staat tussen rechte haakjes om duidelijk te maken dat het één zinsdeel betreft van de lopende zin die we uit deze formule herconstrueren door de juiste voegwoorden toe te voegen.

De logische ontkenning van de uitspraak is

$$\exists k \in \mathbb{N} \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} \quad [n \geq N \wedge |x_n - x| \geq \frac{1}{k}],$$

waarbij “ $\wedge$ ” gelezen moet worden als “en” (net zoals “ $\vee$ ” staat voor “of”). Het is misschien even wennen aan de notatie maar het is belangrijk dat we leren uitspraken en ontkenningen van uitspraken precies te formuleren want we gaan in dit college de uitspraken die we doen bewijzen, vaak door aan te nemen dat de ontkenning van een te bewijzen uitspraak tot een tegenspraak met de gemaakte aannamen leidt.

De hierboven geformuleerde definitie van

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

ook wel genoemd

$$x_n \rightarrow x \quad \text{als} \quad n \rightarrow \infty,$$

of “de rij $(x_n)_{n=0}^\infty$ is convergent met limiet x ”, heeft als nadeel dat verificatie alleen mogelijk is als we de limiet x al kennen. We willen in de analyse echter juist nieuwe grootheden als limieten van bekende objecten definiëren. Vandaar dat Cauchy (1789-1857) probeerde een definitie te geven van het convergent zijn van een rij $(x_n)_{n=0}^\infty$ zonder in de definitie de limiet x te gebruiken. Hij kwam tot de conclusie dat je net zo goed kon eisen dat

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} \quad [m, n \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{1}{k}].$$

Tegenwoordig noemen we rijen die aan deze uitspraak voldoen Cauchy rijen. In de tweede helft van de 19-de eeuw leidde dit tot een bruikbare definitie van de reële getallen: waar voorheen reële getallen gezien werden als de andere, niet rationale getallen op de getallenrechte (een vaag begrip), zien we nu een reëel getal als de uitkomst van een benadering met een Cauchy rij gemaakt met de oude vertrouwde rationale getallen uit $\mathbb{Q}$, bijvoorbeeld een decimale ontwikkeling met steeds meer cijfers achter de punt (waarom is een rij als 1, 1.4, 1.41, ... een Cauchy rij?).

De verzameling van reële getallen $\mathbb{R}$ die we hiermee maken heeft precies de eigenschappen die we nodig hebben om het vak analyse te kunnen bedrijven. Oplossingen van vergelijkingen kunnen we maken door de benaderende rij te geven. De reële getallen erven de eigenschap waarmee ze uit de rationale getallen gemaakt zijn: ook Cauchy rijen van reële getallen zijn convergent. Dit is de basis voor alle stellingen die we zullen bewijzen.

Nieuwe functies worden gemaakt als oneindige sommen, zoals bijvoorbeeld e^x hierboven of

$$\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 5}x^5 - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^7 + \dots,$$

waarbij we precies maken wat we met de puntjes bedoelen (kun je zelf de formule voor $\cos x$ hieruit raden?). Andere voorbeelden zijn de meetkundige reeks

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

en

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3 \cdot 2}x^3 + \dots$$

(voor welke x zouden de laatste twee goed zijn?).

Om met deze machtreeksen te werken moeten we, nu we weten wat $\mathbb{R}$ is, precies maken hoe we met oneindige sommen werken en duidelijk maken wat we bedoelen met bijvoorbeeld

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty,$$

of

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

De theorie van machtreeksen komt pas tot volle glorie als we werken met complexe getallen. Hiervoor breiden we $\mathbb{R}$ uit met het imaginaire getal i dat de eigenschap heeft dat $i^2 = -1$. Dit leidt tot de verzameling van de complexe getallen $\mathbb{C}$ bestaande uit getallen van de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en de daarbij horende rekenregels. We zullen zien dat

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

en

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

maar in dit college ruiken we slechts aan complexe functietheorie.

Het begrip continuïteit speelt een belangrijke rol in de analyse, bijvoorbeeld bij het beantwoorden van de vraag of een gegeven reëelwaardige functie gedefinieerd op een deelverzameling van de reële getallen extrema heeft. Het zal duidelijk zijn dat deze vraag in vele toepassingen binnen en buiten de wiskunde vaak gesteld wordt. We zullen ondermeer bewijzen dat een continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ altijd een maximum en een minimum heeft. Wordt dit aangenomen in een punt $x_1 \in (a, b)$ (dus niet op de rand), dan is $f'(x_1) = 0$ als f differentieerbaar is in x_1 .

Als gevolg van deze stelling zullen we zien dat als een functie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ bijvoorbeeld drie keer differentieerbaar is, $f(x)$ in de buurt van $x = x_0 \in (a, b)$, goed te benaderen is met een tweedegraadsfunctie:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R(x, x_0),$$

waarbij we scherpe uitspraken kunnen doen over de fout $R(x, x_0)$: voor gegeven x_0 en x bestaat er een tussenpunt x_1 tussen x_0 en x met de eigenschap dat de

fout gegeven wordt door

$$R(x, x_0) = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(x_1)(x - x_0)^3.$$

Dit is de uitspraak over de restterm van Lagrange bij een tweede orde Taylorbenadering en de algemene n -de orde versie voor $(n + 1)$ -keer differentieerbare functies laat zich raden.

De nulde orde versie zegt dat er een x_1 is tussen x_0 en x zó dat

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_1)(x - x_0).$$

Deze uitspraak is bijna hetzelfde als de middelwaardestelling: als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is en differentieerbaar op (a, b) , dan is er een $x_1 \in (a, b)$ met

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

In woorden: er is een punt op de grafiek waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is met de lijn door begin- en eindpunt van de grafiek. De middelwaardestelling volgt vrijwel rechtstreeks uit de stelling over maxima en minima hierboven (denk eerst maar aan het geval waarin $f(b) = f(a)$) en kan gebruikt worden om de stelling over de Lagrange restterm te bewijzen. Evenzo volgen uit de middelwaardestelling de limietregels van l' Hôpital voor $\frac{0}{0}$ limieten.

Het bewijs van de stelling over extrema van continue functies berust op een belangrijke eigenschap van $\mathbb{R}$ die $\mathbb{Q}$ niet heeft. In $\mathbb{R}$ heeft iedere begrensde rij een deelrij die convergeert naar een limiet: gegeven een rij reële getallen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \dots,$$

waarvan we alleen weten dat

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M,$$

kunnen we een convergente rij maken door getallen uit de rij weg te laten en de overgebleven getallen opnieuw te nummeren. Dat $\mathbb{R}$ deze eigenschap heeft wordt bewezen met een andere eigenschap van $\mathbb{R}$: als A een niet-lege deelverzameling is van $\mathbb{R}$ die naar boven begrensd is, m.a.w.

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall a \in A \quad a \leq M$$

(M heet een bovengrens van A), dan heeft A ook een kleinste bovengrens, ook wel supremum genoemd, en genoteerd als $\sup A$. Met andere woorden: $\sup A$ is een bovengrens en geen enkele $M < \sup A$ is ook een bovengrens. Deze eigenschappen worden ook gebruikt voor het bewijs van een andere belangrijke eigenschap van continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Als $f(a)f(b) < 0$ dan heeft f een nulpunt in (a, b) , zijnde een oplossing van $f(x) = 0$.

Het continuïteitsbegrip is ook essentieel voor het verband tussen differentiaalrekening en integraalrekening zoals we dat hierboven al gebruikten bij het

omschrijven van een differentiaalvergelijking naar een integraalvergelijking voor de introductie van $\exp(x)$. Voor continue functies $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ laten we zien dat de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door $x = a$, $x = b$, $y = 0$ en $y = f(x)$ kan worden gemaakt als limiet van oppervlakten van geschikt gekozen collecties rechthoeken. Dit resulteert in een zinvolle definitie van het begrip oppervlakte voor een grote klasse van deelverzamelingen van het vlak. De oppervlakte van het genoemde vlakdeel wordt genoteerd als

$$\int_a^b f(x)dx,$$

spreek uit, de integraal van f van a tot b . In plaats van x kan elke andere (dummy) variabele genomen worden, liefst een die nog niet in de notatie voorkomt. Deze suggestieve notatie loopt vooruit op het verband tussen integreren en differentiëren, waarvoor we bovenstaande definitie uitbreiden tot willekeurige continue functies en de rechtergrens variabeel maken. We vervangen b door x , x door s en schrijven

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds.$$

We zullen bewijzen dat deze F een primitieve (anti-afgeleide) is van f , d.w.z. $F'(x) = f(x)$ en dat alle primitieven van f van de vorm $F(x) + C$ zijn. Zodoende geldt voor elke primitieve F dat

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Deze uitspraken staan bekend als de hoofdstellingen van de integraalrekening.

De rekenregels voor het bepalen van integralen of primitieve functies (substities, partieel integreren) volgen nu uit de regels voor het rekenen met afgeleiden (kettingregel, produktregel).

De hoofdstellingen van de integraalrekening, gecombineerd met het juiste limietbegrip voor rijen van functies, geven vervolgend de belangrijkste uitspraken voor machtreksen, waarmee we, indien ze convergent zijn, kunnen rekenen alsof het polynomen (veeltermen) zijn. De meeste niet-elementaire functies kunnen ermee worden definieerd.

Veel van deze functies kunnen ook rechtstreeks met behulp van integralen en inverse functies worden gedefinieerd, bijvoorbeeld eerst

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{s} ds,$$

en daarna $\exp$ als de inverse functie van $\log$. Een andere intrigerende definitie is

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

een formule waarmee rente op geld continu bijgeschreven kan worden ($n = 12$ is maandelijks, $n = 365$ is dagelijks etc.).

Stellingen over het bestaan van inverse functies (en de eigenschappen van inverse functies) zijn van groot belang in alle delen van de wiskunde. Voor functies van één variabele is dit onderwerp van een iets andere aard (“makkelijker”) dan voor functies van meer variabelen die in het vervolgcursus aan bod komen. Hierbij speelt een fundamentele stelling een rol die we in vele situaties zullen tegen komen en die te belangrijk is om hier onbesproken te laten. Deze stelling illustreert waarom het natuurlijk is om te abstraheren. We hebben gezien dat we in de analyse nieuwe objecten, bijvoorbeeld oplossingen van vergelijkingen, bepalen als limieten van objecten die we al kennen. Vaak kan dit op een iteratieve manier, zoals bij de methode van Newton en bij Picard iteratie. Een mooi voorbeeld is het oplossen van de vergelijking

$$x = \cos(x).$$

We nemen een startwaarde, bijvoorbeeld 0, vullen die in de cosinus en doen met de uitkomst weer hetzelfde en herhalen dit. Dit geeft een rij $x_0, x_1, x_2, \dots$, gedefinieerd door

$$x_0 = 0 \quad \text{en} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \cos x_{n-1}.$$

In woorden: we itereren de cosinus met startwaarde 0. We zien dat vanaf $n = 2$ alle x_n liggen in het interval $I = [0, \cos 1]$. Noemen we de functie $\cos$ even Φ , dan heeft de functie Φ dankzij de middelwaardestelling de eigenschap dat

$$\forall x, y \in I \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq M|x - y|,$$

waarbij we voor M het maximum van de absolute waarde van de functie $\Phi' = -\sin$ op het interval I kunnen nemen, dus $M = \sin 1$. Omdat $M < 1$ zeggen we dat $\Phi : I \rightarrow I$ een stricte contractie is. De Banach-contractie stelling zegt nu dat elke rij die we maken door Φ te itereren, met wat voor startwaarde in I dan ook, convergeert naar een oplossing van $x = \Phi(x)$ (en dus is er ook maar precies één oplossing, waarom?).

Het bewijs van deze stelling gebruikt, afgezien van de aanname dat Φ een contractie is, slechts twee aannamen. De eerste is dat de afstandsfunctie van twee getallen gedefiniëerd met behulp van de absolute waarde door

$$d(x, y) = |x - y|,$$

voldoet aan

$$\forall x, y \in I \quad d(x, y) \geq 0,$$

$$\forall x, y \in I \quad [d(x, y) = 0 \iff x = y],$$

$$\forall x, y \in I \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$\forall x, y, z \in I \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

De tweede is dat Cauchy rijen convergent zijn. Hierbij moeten in de definities van Cauchy rij en convergente rij $|x_n - x_m|$ en $|x_n - x|$ vervangen worden

door respectievelijk $d(x_n, x_m)$ en $d(x_n, x)$. De aanname dat Φ een contractie is moeten we schrijven als

$$\exists M < 1 \quad \forall x, y \in I \quad d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq M d(x, y).$$

Bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen zullen we deze stelling gebruiken toegepast op de verzameling X bestaande uit de continue functies op bijvoorbeeld het interval $[0, 1]$, met als afstandsfunctie

$$d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|.$$

Een andere belangrijke toepassing is in het bewijs van de impliciete en inverse functiestellingen, zowel in de eindig- als oneindigdimensionale context.