

VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Afdeling Wiskunde
Proeftentamen STOCHASTISCHE PROCESSEN (401026)
op 15 oktober 2009, duur: 2 uur.

Dit tentamen bestaat uit 3 opgaven. Bij elk onderdeel staat tussen rechte haken vermeld hoeveel punten voor het onderdeel kunnen worden verkregen. Het tentamencijfer wordt gegeven door: # punten/27 + 1.

Opgave 1. Vanaf een centrale locatie kan zowel met tram 3 als met bus 5 worden gereisd. Aankomsten van tram 3 vormen een Poisson proces met een intensiteit van 3 trams per uur. De aankomsten van bus 5 vormen een Poisson proces met een intensiteit van 5 bussen per uur.

- (a) [2 pt.] Wat is de kans dat de komende 15 minuten tenminste twee bussen aankomen?
- (b) [2 pt.] Wat is de kans dat de komende 15 minuten geen bus en geen tram aankomt?
- (c) [2 pt.] Wat is de kans dat er precies twee trams passeren voor de eerste bus arriveert?
- (d) [2 pt.] Stel dat 40% van de bussen niet tot aan de gewenste eindbestemming rijden, terwijl alle trams naar de gewenste eindbestemming gaan. Bewijs dat de kans dat in een willekeurig uur evenveel bussen als trams arriveren die naar de gewenste eindbestemming gaan, gelijk is aan

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(e^{-3} \frac{3^i}{i!} \right)^2.$$

Opgave 2. Beschouw een Markov keten met toestandruimte $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) [2 pt.] Teken het netwerk van mogelijke transitieën en bepaal de klassen van onderling communicerende toestanden.
- (b) [3 pt.] Bepaal de fractie tijd dat het proces in ieder van de toestanden verblijft.
- (c) [2 pt.] Wat is het verwachte aantal benodigde transitieën om toestand 2 te bereiken, startend in toestand 1?
- (d) [3 pt.] We zijn geïnteresseerd in de kans dat toestand 5 niet bereikt wordt gedurende de eerste 10 transitieën van de Markov keten, wanneer we starten in toestand 1. Geef aan hoe door het gebruik van absorberende toestanden deze kans bepaald kan worden. Geef hierbij in ieder geval de aangepaste 1-staps overgangskansen of overgangsmatrix en de benodigde berekeningen.

Opgave 3. In een productiehal zijn een snelle en een, wat verouderde, langzame machine aanwezig voor het afhandelen van orders. Orders komen binnen volgens een Poisson proces met intensiteit λ . Een binnenkomende order die beide machines bezet treft gaat verloren. Als een aankomende order beide machines vrij treft, dan wordt de order toegewezen aan de snelle machine. Is alleen de langzame machine vrij, dan gaat de order naar de langzame machine. Het is niet mogelijk om tussentijds een order om te zetten van de langzame naar de snelle machine wanneer de snelle machine vrij komt. De bewerkingstijd van een opdracht is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\mu_1$ op de snelle machine en verwachtingswaarde $1/\mu_2$ op de langzame machine ($\mu_1 > \mu_2$).

- (a) [3 pt.] Formuleer een geschikte continue-tijds Markov keten. Specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten en geef de evenwichtsvergelijkingen.
- (b) [3 pt.] Na verloop van tijd besluit men de langzame machine geheel uit de productie te halen. Hiermee blijft alleen de snelle machine over. Wanneer de snelle machine bezet is, dan gaat een eventuele nieuwe order (nog steeds) verloren. Bepaal de fractie tijd dat de snelle machine in gebruik is.
- (c) [3 pt.] Door een juiste marketingstrategie is er de mogelijkheid om maximaal N orders te laten wachten in een wachtrij. De eerste order in de rij wordt dan aan de snelle machine toegewezen zodra deze vrijkomt. Formuleer opnieuw een geschikte continue-tijds Markov keten en specificeer het toestandsdiagram met de overgangsintensiteiten. Geef ook de evenwichtsvergelijkingen. Zal de fractie tijd dat de snelle machine in gebruik is dalen, stijgen of gelijk blijven ten opzichte van het antwoord op vraag (b)?