

Werkcollege Stochastische Processen

Werkcollege 3, 17/09/09

Opgave 12. (*op basis van Ross*) Drie witte en drie zwarte ballen zijn over twee urns verdeeld zodanig dat beide urns drie ballen bevatten. We zeggen dat het systeem zich in toestand i bevindt, $i = 0, 1, 2, 3$, wanneer er i witte ballen in de eerste urn zitten. Iedere stap (tijdseenheid) pakken we willekeurig één bal uit de eerste en één uit de tweede urn en verwisselen we de twee ballen. Laat X_n de toestand van het systeem zijn na de n -de stap. Leg uit waarom $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ een Markov keten is en bepaal de 1-staps overgangskansen. Stel ook de matrix van 1-staps overgangskansen op.

Opgave 13. Bij het nemen van investeringsbeslissingen is de algehele economische situatie van groot belang. Een praktisch en eenvoudig model beschrijft de algehele staat van de economie in een bepaald jaar door twee toestanden: *goed* of *slecht* (crisis). We nemen hier aan dat de toestand van de economie in jaar x afhangt van de toestand van de economie van de afgelopen twee jaren $x - 1$ en $x - 2$. Als de laatste twee jaren de economie als goed is bestempeld, dan is de economie het komende jaar goed met kans 0.9. Is de economie de afgelopen twee jaar slecht geweest, dan is de economie het komende jaar goed met kans 0.45. Het komende jaar is de economie goed met kans 0.7 als de economie dit jaar goed is en vorig jaar slecht, terwijl deze kans 0.5 is als de economie dit jaar slecht is en vorig jaar goed. Definieer een geschikte Markov keten die de toestand van de economie beschrijft en bepaal de 1-stapovergangskansen.

Opgave 14. Opgave 7.2 uit Tijms

Opgave 15. (*uit Ross*) Beschouw het proces $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ die de waarden 0, 1 en 2 kan aannemen. Stel dat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ = \begin{cases} P_{ij}^I, & \text{als } n \text{ even is,} \\ P_{ij}^{II}, & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases} \end{aligned}$$

waarbij $\sum_{j=0}^2 P_{ij}^I = \sum_{j=0}^2 P_{ij}^{II} = 1$, voor $i = 0, 1, 2$. Is $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ een Markov keten? Zo niet, laat dan zien hoe het proces in een Markov keten kan worden getransformeerd door het vergroten van de toestandsruimte.

Opgave 16. (*Een voorraadmodel met periodieke aanvulling en nalevering*)

Een electronicazaak voert in haar assortiment onder meer een bepaald type wasmachine. De vraag naar wasmachine's is stabiel over de tijd. De totale vraag per week is Poisson verdeeld met een verwachtingswaarde van λ . De vraaghoeveelheden in verschillende weken zijn onafhankelijk van elkaar. Een klant die een wasmachine vraagt terwijl deze niet op voorraad is, plaatst een bestelling en ontvangt de wasmachine zodra deze weer op voorraad is.

De voorraad aan wasmachine's wordt als volgt beheerd: aan het begin van iedere *even* week wordt de voorraad aangevuld tot een vaste waarde Q (wanneer er aan het einde van de vorige week x waren, dan is de bestelling $Q - x$). Tijdens *oneven* weken wordt de

voorraad niet bijgevuld. Op het moment dat er weer Q wasmachine's op voorraad zijn, worden de klanten gebeld die een wasmachine in bestelling hebben. We nemen aan dat al deze klanten ook (onmiddellijk) de wasmachine komen afhalen of dat de wasmachine's (onmiddellijk) worden bezorgd.

Laat $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ de voorraad aan het begin van week n zijn, vlak voor een eventueel aanvulmoment. Waarom is $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ geen Markov keten? Laat zien hoe het voorraadproces in een Markov keten kan worden getransformeerd door het vergroten van de toestandsruimte. Geef ook de 1-staps overgangskansen.