

Werkcollege Stochastische Processen

Werkcollege 6, 08/10/09

Opgave 25. Beschouw de Markov keten met toestanden 1, 2 en 3. De overgangskansen zijn $p_{11} = p_{12} = 1/4$, $p_{13} = 1/2$, $p_{21} = 1/4$, $p_{23} = 3/4$ en $p_{31} = p_{33} = 1/2$.

- Bereken de evenwichtsverdeling voor deze keten.
- Bereken het verwachte *aantal sprongen* om vanuit toestand 1 in toestand 3 te komen (inclusief de overgangen waarbij de toestand niet verandert).

Uit de bovenstaande Markov *keten* contrueren we een Markov *proces*. Bij elk bezoek aan toestand i , $i = 1, 2, 3$, verblijft het proces in die toestand een exponentieel verdeelde tijd met parameter μ_i , waarbij $\mu_1 = 1/2$, $\mu_2 = 1/3$ en $\mu_3 = 1$. Aan het eind van de verblijftijd in een toestand springt het Markov proces naar een nieuwe toestand volgens de overgangskansen van de Markov keten. Merk op dat het voor toestanden 1 en 3 mogelijk is om na de verblijftijd weer terug te keren naar dezelfde toestand (voor het te construeren Markov proces is dit niet mogelijk).

- Bereken de verdeling van de *totale* verblijftijd, tot de eerstvolgende sprong, in elk van de toestanden $i = 1, 2, 3$.

Hint: Conditioneer voor toestanden 1 en 3 op het aantal sprongen voor de toestand verlaten wordt; wanneer de toestand n keer doorlopen wordt, dan heeft deze dus een Erlang(n, μ_i) verdeling, ofwel

$$\mathbb{P}(S > x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu_i x} \frac{(\mu_i x)^k}{k!},$$

met $S \sim \text{Erlang}(n, \mu_i)$.

- Geef de generator (ofwel rate matrix \mathbf{Q}) van dit Markov proces. Maak daarbij gebruik van het antwoord op vraag (c).
- Bereken de verwachte *tijd* om vanuit toestand 1 in toestand 3 te komen.

Opgave 26. (*op basis van Ross*) Beschouw twee machines, welke beide een exponentiële levensduur hebben met verwachting $1/\lambda$. Er is één reparatiefaciliteit waarin een machine gerepareerd wordt in een exponentieel verdeelde tijd met intensiteit μ .

- Formuleer een geschikt Markov proces en geef het toestandsdiagram met overgangsintensiteiten.
- Neem aan dat in de begintoestand beide machines functioneren. Geef de voorwaartse Kolmogorov vergelijkingen (deze hoeven niet opgelost te worden).

Opgave 27 Opgave 8.1 uit Tijms

Opgave 28 Opgave 8.3 uit Tijms