

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

Facoltà di Scienze MM. FF. NN.

Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Tesi di Laurea Specialistica

IL MOTO DI FILAMENTI
VORTICOSI
QUASI PARALLELI

Relatore: Prof.ssa Susanna Terracini

Tesi di Laurea di

Roberto Castelli

Matr. 061592

ANNO ACCADEMICO 2004/2005

INTRODUZIONE

Questa tesi tratta del moto di filamenti vorticosi quasi paralleli in un fluido incompressibile omogeneo e prende spunto da alcune note di Gustavo Ponce dal titolo “*The interaction of almost parallel vortex filaments*”. In questo scritto vengono riassunti alcuni risultati, ottenuti dall’autore insieme a Kenig e Vega, raccolti in un articolo precedente [6]. A quest’ultimo lavoro si farà spesso riferimento nel corso di questa tesi.

Lo studio del campo di vorticità è una parte della fluidodinamica di grande interesse scientifico, sia da un punto di vista modellistico, che da un punto di vista prettamente analitico, soprattutto per fluidi tridimensionali. Infatti, anche per il moto di un singolo filamento di vortice, il discorso si complica passando dal caso bidimensionale al caso tridimensionale. Se in due dimensioni è semplice calcolare la velocità indotta dalla vorticità, in tre dimensioni si presenta il problema detto dell’autoinduzione: la velocità autoindotta dalla vorticità non è calcolabile esplicitamente dal momento che si ha un problema di singolarità.

In questa tesi è descritto il modello della L.I.A. per risolvere, tramite approssimazione, il problema dell’autoinduzione. Il risultato ottenuto è quindi applicato al caso particolare di filamenti di vortice quasi paralleli, la cui evoluzione è data da un’equazione di Schrödinger lineare. Il modello si com-

pleta aggiungendo la mutua interazione tra più filamenti di vortice, considerati come se fossero perfettamente paralleli. Quest'ultima parte conduce ad un potenziale di tipo logaritmico nelle distanze tra i filamenti.

Seguendo le linee tracciate da Kenig, Ponce, Vega in "*On the interaction of nearly parallel vortex filaments*", si analizza il sistema di moto per N filamenti vorticosi quasi paralleli e vengono descritte particolari soluzioni di tipo elicoidale. La struttura Hamiltoniana permette uno studio più approfondito del sistema, in base al quale è possibile formulare un teorema per la stabilità delle configurazioni costanti.

In particolare questa tesi è suddivisa in cinque capitoli e due appendici. Nel primo capitolo si studiano le proprietà del fluido per dedurre il sistema di Eulero associato al campo di velocità. Si definisce quindi la vorticità e se ne deducono le equazioni in dimensione 2 e 3 ; inoltre si dimostra qualche risultato teorico riguardanti i filamenti di vortice, come il teorema della circolazione di Kelvin e il teorema di Helmholtz.

Il capitolo 2 è dedicato al moto di punti di vortice nel piano. Si ricava il campo di velocità indotto da un singolo punto di vortice e si estende il risultato al caso di N punti di vortice. Ricaviamo quindi il sistema che ne descrive l'evoluzione nel tempo, studiamo la funzione Hamiltoniana che presenta un potenziale logaritmico come funzione delle distanze tra i punti di vortice, e infine descriviamo soluzioni particolari del sistema di moto, che siano configurazioni di equilibrio fisso o relativo.

Nel terzo capitolo si analizza il moto di un singolo filamento vorticoso. Si introduce il problema dell'autointerazione di un filamento di vortice, che conduce ad un' equazione integrale con singolarità, generalmente non risolubile.

Ci serviremo del modello L.I.A. (*Local Induction Approximation*) introdotto per la prima volta da Da Rios [4] e si giungerà ad una approssimazione della velocità in un punto vicino al filamento di vortice, dipendente solo dalle proprietà locali del filamento stesso. Daremo una giustificazione del modello L.I.A. e vedremo che l'equazione della velocità è associata ad una equazione di Schrödinger non lineare. Applicheremo il risultato ottenuto al caso di un filamento di vortice quasi parallelo; in tal caso il moto è descritto da un'equazione di Schrödinger lineare.

Nel capitolo 4 applichiamo i risultati ottenuti nei capitoli precedenti e seguiamo le argomentazioni introdotte da R.Klein, A.Majda, K.Damodaran in [7] per ottenere un modello per l'interazione di N filamenti vorticosi quasi paralleli. Si studia il sistema di moto che ne deriva, in particolare la struttura Hamiltoniana e quantità conservate. Scriveremo alcune soluzioni esplicite del moto di N filamenti di vortice quasi paralleli della stessa intensità. In particolare ci concentreremo sui moti elicoidali, omografici, corrispondenti a configurazioni costanti. Sono date anche soluzioni calcolate per via numerica.

Infine il capitolo 5 è dedicato allo studio della stabilità di particolari soluzioni del sistema di moto. Esponiamo un teorema dovuto a Kenig, Ponce, Vega riguardante la stabilità della configurazione costante di tre filamenti di vortice della stessa intensità. E' opinione degli autori che per più di tre filamenti di vortice il sistema non sia stabile, alla luce anche di risultati numerici riportati in [1].

Nelle appendici sono riportati cenni sulla variazione di un funzionale e la dimostrazione dei teoremi di esistenza e unicità locali delle soluzioni di O.D.E. e della dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali.

CastelliRoberto

r.castelli3@campus.unimib.it

Indice

1	EQUAZIONI DI MOTO DEL FLUIDO	9
1.1	SISTEMA DI EULERO	9
1.2	EQUAZIONE PER LA VORTICITA'	15
1.3	CIRCOLAZIONE E TEOREMA DI KELVIN	21
1.4	TUBO DI VORTICE E TEOREMA DI HELMHOLTZ	25
2	MOTO DI PUNTI DI VORTICE	28
2.1	INVERSIONE DEL LAPLACIANO: LEGGE DI BIOT-SAVART	29
2.2	MOTO DI UN PUNTO DI VORTICE	30
2.3	MOTO DI N PUNTI DI VORTICE	33
2.4	QUANTITA' CONSERVATE E SOLUZIONI PARTICOLARI	35
3	MOTO DI UN SINGOLO FILAMENTO VORTICOSO	45
3.1	IL MODELLO L.I.A.	48
3.2	EQUAZIONE DI MOTO PER UN FILAMENTO DI VORTICE QUASI PARALLELO	53
4	INTERAZIONE DI N FILAMENTI VORTICOSI QUASI PARALLELI	57

4.1	HAMILTONIANA E QUANTITA' CONSERVATE	59
4.2	SOLUZIONI DI TIPO ELICOIDALE: CONFIGURAZIONI COSTANTI	64
4.3	SOLUZIONI DI TIPO ELICOIDALE E OMOGRAFICHE . .	72
5	STABILITA' DELLE SOLUZIONI DI MOTO DI N FILA- MENTI VORTICOSI QUASI PARALLELI	82
5.1	STABILITA' PER TRE FILAMENTI DI VORTICE PER- FETTAMENTE PARALLELI	86
5.2	TEORIA PER L'ESISTENZA LOCALE	89
5.3	ESISTENZA GLOBALE DELLA SOLUZIONE	95
A	VARIAZIONE DI UN FUNZIONALE	102
B	ESISTENZA E UNICITA' LOCALE DELLE SOLUZIONI PER O.D.E	105
	Bibliografia	112

Capitolo 1

EQUAZIONI DI MOTO DEL FLUIDO

In questo capitolo sono descritte le principali proprietà di un fluido e sono riportati alcuni classici teoremi riguardanti il campo di velocità e il campo di vorticità. Le definizioni e i risultati ottenuti, se non espressamente indicato, sono tratti dai testi di Newton [9] e di Majda, Bertozzi [8].

1.1 SISTEMA DI EULERO

Consideriamo un fluido ideale, incomprimibile e omogeneo e denotiamo con $\phi_t(\vec{x}_0) = \vec{x}(t; \vec{x}_0) = \vec{x}(t) = (x_1, x_2, x_3)(t)$ la posizione al tempo t di una particella di fluido che si trovava in x_0 al tempo $t = 0$.

Indichiamo con $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ il campo di velocità del fluido e diciamo che il flusso è **stazionario** se il campo di velocità è costante nel tempo, cioè se $\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{x}, t) = 0$. Chiamiamo **linee di corrente** le linee nello spazio ovunque tangenti al campo di velocità ad ogni istante fissato, **traiettorie** le linee

seguite dalle particelle di fluido nel tempo, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t), t) \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

Dalle definizioni precedenti segue che se il flusso è stazionario allora le linee di corrente e le traiettorie coincidono.

Notazione

Di seguito indicheremo con

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} & \quad \text{divergenza} \\ \nabla \times \vec{v} & \quad \text{rotore} \end{aligned}$$

di un campo vettoriale $\vec{v}$.

Definizione 1.1 (Incompressibilità) *Un fluido si dice incompressibile se la densità rimane costante lungo le traiettorie .*

Consideriamo una porzione di fluido e immaginiamo di seguirla nel tempo lungo le traiettorie, allora se il fluido è incompressibile il moto avviene in modo tale che la porzione cambia forma ma non volume. Se indichiamo con V_0 la posizione della porzione di fluido considerata al tempo $t = 0$, ovvero l'insieme delle posizioni delle particelle di fluido contenute nella porzione e con $V_t = \phi_t(V_0)$ la posizione della stessa porzione di fluido al tempo t , allora

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_t} dV = \int_{\partial V_t} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{V_t} \nabla \cdot \vec{v} \, dV .$$

Enunciamo quindi il seguente teorema.

Teorema 1.1 *Se un fluido è incompressibile, il suo campo di velocità è a divergenza nulla e viceversa.*

Definizione 1.2 (Derivata materiale) Sia $f = f(\vec{x}, t)$. Chiamiamo derivata materiale di f la funzione

$$\frac{D}{Dt} f = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f \quad .$$

La derivata materiale indica la variazione della funzione f lungo le traiettorie.

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t} f(x_1, x_2, x_3, t) + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} f \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(x_1, x_2, x_3, t) + \vec{v} \cdot \nabla f \\ &= \frac{D}{Dt} f \quad . \end{aligned}$$

Teorema 1.2 (Teorema del trasporto) Sia V la posizione di una porzione di fluido e $V_t = \phi_t(V)$ la posizione della stessa porzione al tempo t . Allora

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f(\vec{x}, t) dV = \int_{V_t} \left(\frac{D}{Dt} f(\vec{x}, t) + f(\vec{x}, t) (\nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)) \right) dV \quad . \quad (1.1)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} f(\vec{x}, t) dV &= \int_{V_t} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}, t) dV + \int_{\partial V_t} f(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} ds \\ &= \int_{V_t} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}, t) dV + \int_{V_t} \nabla \cdot (f(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) dV \\ &= \int_{V_t} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}, t) + \nabla f(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + f(\vec{x}, t) (\nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)) dV \\ &= \int_{V_t} \left(\frac{D}{Dt} f(\vec{x}, t) + f(\vec{x}, t) (\nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)) \right) dV \quad . \end{aligned}$$

□

Si consideri l'equazione di bilancio della quantità di moto per una porzione di fluido in un volume V_t trasportata dal flusso:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \vec{v} dV = \int_{\partial V_t} \vec{t}(\vec{x}, \vec{n}) d\sigma + \int_{V_t} \rho \vec{g} dV \quad (1.2)$$

dove ρ indica la densità del fluido e $\vec{t}(\vec{x}, \vec{n})$ lo sforzo nel punto $\vec{x}$ sulla superficie di V_t . Nell'ipotesi di Cauchy che lo sforzo sia lineare rispetto alla normale, introduciamo il tensore degli sforzi T tale che $\vec{t}(\vec{x}, \vec{n}) = T(\vec{x}) \cdot \vec{n}$, quindi per la (1.1) riscriviamo la (1.2) nella forma

$$\int_{V_t} \left(\frac{D}{Dt}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \right) dV = \int_{V_t} \nabla \cdot T dV + \int_{V_t} \rho \vec{g} dV .$$

Dall'equazione precedente, nell'ipotesi che il fluido sia incompressibile, segue

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \cdot T + \rho \vec{g} . \quad (1.3)$$

In questa tesi consideriamo fluidi sempre ideali, ovvero che esista una funzione scalare $p = p(\vec{x}, t)$, **pressione**, tale che per ogni dominio $W \subset \mathbb{R}^3$ la forza esercitata su ∂W sia sempre perpendicolare alla superficie stessa e uguale, per unità di area, a $p = p(\vec{x}, t)$. Quindi il tensore degli sforzi assume la forma $T = -pId$ e $\nabla \cdot T = \nabla p$; se inoltre tralasciamo le forze di volume e consideriamo il fluido omogeneo, l'equazione di bilancio della quantità di moto (1.3) assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) = -\nabla p . \quad (1.4)$$

L'equazione (1.4) insieme al vincolo di incompressibilità determina il **sistema di Eulero** per il campo di velocità del fluido

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v_j + \vec{v} \cdot \nabla v_j = (-\nabla p)_j & j = 1, 2, \dots, N \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v}(x, 0) = \vec{v}_0(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

Sia $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e si consideri la matrice jacobiana

$$J\vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v_1 & \partial_{x_2} v_1 & \partial_{x_3} v_1 \\ \partial_{x_1} v_2 & \partial_{x_2} v_2 & \partial_{x_3} v_2 \\ \partial_{x_1} v_3 & \partial_{x_2} v_3 & \partial_{x_3} v_3 \end{pmatrix}$$

allora, usando lo sviluppo di Taylor, si ottiene

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{x} + \vec{h}, t) &= \vec{v}(\vec{x}, t) + (J\vec{v})(\vec{x}, t) \cdot \vec{h} + O(\|\vec{h}\|^2) \\ &= \vec{v}(\vec{x}, t) + (S(\vec{x}, t) + \Omega(\vec{x}, t)) \cdot \vec{h} + O(\|\vec{h}\|^2)\end{aligned}$$

dove

$$S(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left((J\vec{v}) + (J\vec{v})^t \right) (\vec{x}, t) \quad \text{e} \quad \Omega(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left((J\vec{v}) - (J\vec{v})^t \right) (\vec{x}, t)$$

sono rispettivamente la parte simmetrica e antisimmetrica di $J\vec{v}(\vec{x}, t)$. Notiamo quindi che in un piccolo intorno di ogni punto $\vec{x}$ la velocità è data dalla somma di tre contributi, una velocità di traslazione, deformazione e rotazione.

Definizione 1.3 (Vorticità) Dato un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x}, t)$ si definisce vorticità $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ di $\vec{v}(\vec{x}, t)$ il campo vettoriale

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{v}(\vec{x}, t) . \quad (1.6)$$

Dimostriamo ora un teorema che ci permette di trovare soluzioni esplicite del sistema di Eulero (1.5).

Teorema 1.3 Sia $S(t) \in \mathcal{M}(3, R)$ una matrice simmetrica, di traccia nulla. Sia $\vec{\omega}(t)$ la vorticità data come soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{\omega} = S(t) \vec{\omega} \\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0 \end{cases}$$

e sia Ω la matrice antisimmetrica tale che $\Omega \cdot \vec{x} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \vec{x}$. Allora il campo di velocità e la pressione definiti da

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \vec{x} + S(t) \vec{x}$$

$$p(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} S(t) + S^2(t) + \Omega^2(t) \right] \vec{x} \cdot \vec{x}$$

sono soluzione del sistema di Eulero (1.5).

Dimostrazione. Calcoliamo la derivata rispetto a x_k della prima equazione del sistema di Eulero(1.5). Per ogni componente v^i della velocità $\vec{v}$ si ha:

$$(v_{x_k}^i)_t + \sum_j v^j (v_{x_k}^i)_{x_j} + \sum_j (v_{x_k}^j) (v_{x_j}^i) = -p_{x_i x_k} . \quad (1.7)$$

Introduciamo la notazione matriciale

$$(V)_{i,k} = v_{x_k}^i \quad \text{e} \quad (P)_{i,k} = p_{x_i x_k} .$$

L'equazione (1.7) si riscrive nella forma

$$\frac{D}{Dt} V + V^2 = -P \quad (1.8)$$

dove

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} V \right)_{i,k} = \frac{\partial}{\partial t} (V_{i,k}) \quad \text{e} \quad [(\vec{v} \cdot \nabla) V]_{i,k} = (\vec{v} \cdot \nabla) V_{i,k} .$$

Vogliamo cercare delle relazioni tra la parte simmetrica S e la parte antisimmetrica Ω della matrice V , matrice jacobiana di $\vec{u}$. Poniamo quindi $S = \frac{1}{2}(V + V^t)$ e $\Omega = \frac{1}{2}(V - V^t)$. Allora

$$V^2 = (\Omega + S)^2 = (\Omega^2 + S^2) + (\Omega S + S \Omega) .$$

Quindi dividendo l'equazione (1.8) nella parte simmetrica e antisimmetrica otteniamo la coppia di equazioni per S, Ω, P

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} S + S^2 + \Omega^2 &= -P & i) \\ \frac{D}{Dt} \Omega + \Omega \cdot S + S \cdot \Omega &= 0 & ii) \end{aligned}$$

Se $\vec{\omega}$ è la vorticità di $\vec{v}$, $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$, allora $\Omega \cdot \vec{h} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \vec{h}$ e l'equazione (ii) è equivalente alla

$$\frac{D}{Dt} \vec{\omega} = S(t) \vec{\omega} . \quad ii^*)$$

Poniamo quindi $\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \vec{\omega}(t) \times \vec{x} + S(t) \vec{x}$ allora

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{v}(\vec{x}, t)) &= \nabla \times \left(\frac{1}{2} \vec{\omega}(t) \times \vec{x} \right) + \nabla \times (S(t) \vec{x}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega}(t) (\nabla \cdot \vec{x}) + \frac{1}{2} \vec{x} \cdot \nabla \vec{\omega} - \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{x} - \vec{x} (\nabla \cdot \vec{\omega}) \\ &\quad + \nabla S \times \vec{x} + S \nabla \times \vec{x} \\ &= \vec{\omega} \quad . \end{aligned}$$

Per definizione di $\vec{\omega}$ e essendo $\vec{\omega}$ dipendente solo dal tempo si ha che la condizione $ii^*)$ è soddisfatta. Ponendo Ω tale che $\Omega \cdot h = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times h$ definiamo

$$P = - \left(\frac{D}{Dt} S + S^2 + \Omega^2 \right)$$

in modo che anche la condizione (i) sia soddisfatta. Notiamo che la matrice $P(t)$ appena definita è simmetrica, quindi è la matrice hessiana di una funzione scalare e precisamente di $p(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} P(t) \vec{x} \cdot \vec{x}$. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} p(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} P_{k,j} x_k + \frac{1}{2} \sum_i P_{j,i} x_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_l} p(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2} P_{l,j} + \frac{1}{2} P_{j,l} = P_{j,l} \quad . \end{aligned}$$

□

1.2 EQUAZIONE PER LA VORTICITA'

A partire dall'equazione (1.4) vogliamo ricavare un'equazione per la vorticità $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$.

Ricordiamo le relazioni vettoriali

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) &= \vec{u} (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} - \vec{v} (\nabla \cdot \vec{u}) \\ \nabla (\vec{u} \cdot \vec{v}) &= \vec{u} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{u} \end{aligned} \quad (1.9)$$

e nel caso in cui $\vec{u} = \vec{v}$

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right) = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} . \quad (1.10)$$

Quindi per la (1.10) la (1.4) equivale a

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\nabla p . \quad (1.11)$$

Calcolando il rotore della relazione (1.11) e ricordando che

$$\nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{u}) \quad \text{e} \quad \nabla \times (\nabla f) = 0 ,$$

si ottiene la relazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0 . \quad (1.12)$$

Allora per la (1.9) possiamo riscrivere la relazione precedente nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} - \vec{v} (\nabla \cdot \vec{\omega}) - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} = 0 . \quad (1.13)$$

Notiamo che $\nabla \cdot \omega = 0$ in quanto la divergenza di un rotore è sempre nulla e che $\nabla \cdot v = 0$ per l'ipotesi di incomprimibilità del fluido. Quindi dall'equazione (1.13) otteniamo **l'equazione per la vorticità**

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} = 0 \quad (1.14)$$

o in forma compatta

$$\frac{D}{Dt} \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (1.15)$$

$$\frac{D}{Dt} \vec{\omega}_j = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}_j \quad j = 1, \dots, N \quad (1.16)$$

Il vantaggio della formula precedente è l'assenza del termine di pressione; l'evoluzione della vorticità dipende solo dai valori locali della velocità e della vorticità del fluido.

Notiamo inoltre che se $\vec{\omega}(\vec{x}, 0) = 0$ allora $\vec{\omega}(\phi_t(\vec{x}), t) = 0$ per ogni $t > 0$.

Teorema 1.4 *L'equazione della vorticità (1.15) è equivalente alla formula*

$$\frac{D}{Dt}(\vec{\omega}) = S\vec{\omega} . \quad (1.17)$$

Dimostrazione. Mostriamo che $(\vec{\omega} \cdot \nabla)v_j = (S\vec{\omega})_j$ con S la parte simmetrica della matrice jacobiana di $\vec{v}$. Poniamo $j = 1$, per le altre componenti si agisce alla stessa maniera.

$$\begin{aligned} (S\vec{\omega})_1 &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right) \cdot (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^t \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \omega_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \omega_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \omega_3 . \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \cdot \nabla)v_1 &= (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \omega_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \omega_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \omega_3 \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} (S\vec{\omega})_1 - (\vec{\omega} \cdot \nabla)v_1 &= \frac{\omega_2}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\omega_3}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\omega_2}{2} (-\omega_3) + \frac{\omega_3}{2} (\omega_2) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

□

Vogliamo ora investigare maggiormente sul campo di vorticità, a partire dalle relazioni (1.14) e (1.15). Consideriamo per il momento un flusso bidimensionale,

$$\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$$

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = (0, 0, \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1) =: \omega .$$

Consideriamo quindi la vorticità come uno scalare e la relazione (1.14) si semplifica nella forma scalare

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + (\vec{v} \cdot \nabla) \omega = 0 \quad (1.18)$$

ovvero

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{d}{dt} \omega(\phi_t(\vec{x}_0), t) = \frac{\partial}{\partial t} \omega + (\vec{v} \cdot \nabla) \omega = 0 \quad (1.19)$$

e

$$\omega(\phi_t(\vec{x}_0), t) = \omega(\vec{x}_0).$$

Riassumiamo il risultato ottenuto nel prossimo teorema.

Teorema 1.5 *In un fluido bidimensionale la vorticità è trasportata dal flusso.*

Il risultato precedente esprime una proprietà fondamentale di un fluido piano: se in un punto $\vec{x}$ del fluido è applicata al tempo $t = 0$ una vorticità $\vec{\omega}$, allora per ogni tempo t al punto $\phi_t(\vec{x})$ sarà applicata la stessa vorticità $\vec{\omega}$, cioè la vorticità rimane invariata lungo tutta la traiettoria del punto $\vec{x}$.

Inoltre si ha che

$$\|\omega(\cdot, t)\|_p = \|\omega_0\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega_0(\vec{x})|^p d\vec{x} \right)^{1/p} \quad \forall p \in [1, \infty]$$

e sono indipendenti dal tempo anche le seguenti quantità

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(\vec{x}, t) d\vec{x}, \quad I = \int_{\mathbb{R}^2} (x_2 - x_1) \omega(\vec{x}, t) d\vec{x}, \quad M = \int_{\mathbb{R}^2} |\vec{x}|^2 \omega(\vec{x}, t) d\vec{x}.$$

Si rimanda a [9] per la dimostrazione.

Consideriamo ora un fluido immerso in $\mathbb{R}^3$. Dalla relazione (1.15) abbiamo che

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega}(\phi_t(\vec{x}_0), t) = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}(\phi_t(\vec{x}_0), t). \quad (1.20)$$

Quindi, a differenza di quanto succede nel caso di fluido bidimensionale, la vorticità non rimane invariata sulle traiettorie. L'ultimo termine a destra della relazione (1.20) è detto **vortex-stretching**. In particolare dimostriamo che vale la seguente formula:

$$\vec{\omega}(\phi_t(\vec{x}_0), t) = \nabla_{\vec{x}_0}(\phi_t(\vec{x}_0), t) \vec{\omega}(\vec{x}_0, t) \quad (1.21)$$

dove $\nabla_{\vec{x}_0}$ indica il differenziale rispetto a $\vec{x}_0$.

Teorema 1.6 *Sia $\vec{v}(\vec{s}, t)$ un campo di velocità differenziabile e $\phi_t(\vec{x})$ il campo di traiettorie soddisfacente*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_t(\vec{x}) = \vec{v}(\phi_t(\vec{x}), t) \\ \phi_0(\vec{x}) = \vec{x} \end{cases} \quad (1.22)$$

Sia inoltre $\vec{h}(\vec{x}, t)$ un campo vettoriale differenziabile. Allora

$$\frac{D}{Dt} \vec{h} = (\vec{h} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (1.23)$$

se e solo se

$$\vec{h}(\phi_t(\vec{x}), t) = \nabla_{\vec{x}} \phi_t(\vec{x}) \vec{h}_0(\vec{x}) . \quad (1.24)$$

Dimostrazione. Differenziamo la (1.22) rispetto a $\vec{x}$ e otteniamo

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\vec{x}} \phi_t(\vec{x}) = \nabla \vec{v}|_{(\phi_t(\vec{x}), t)} \cdot \nabla_{\vec{x}} \phi_t(\vec{x}) \quad (1.25)$$

quindi moltiplichiamo ambo i membri della (1.25) per $\vec{h}_0(\vec{x})$

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\vec{x}} \phi_t(\vec{x}) \cdot \vec{h}_0(\vec{x}) = \nabla \vec{v}|_{(\phi_t(\vec{x}), t)} \cdot \nabla_{\vec{x}} \phi_t(\vec{x}) \vec{h}_0(\vec{x}) .$$

Se $\vec{h}(\vec{x}, t)$ soddisfa la (1.23) vuol dire che

$$\frac{d}{dt} \vec{h}(\phi_t(\vec{x}), t) = \nabla \vec{v}|_{(\phi_t(\vec{x}), t)} \cdot \vec{h}(\phi_t(\vec{x}), t) .$$

Osserviamo che le funzioni $\nabla_{\vec{x}} \phi_t(\vec{x}) \cdot \vec{h}_0(\vec{x})$ e $\vec{h}(\phi_t(\vec{x}), t)$ soddisfano la stessa equazione differenziale ordinaria con lo stesso dato iniziale. Quindi per unicità della soluzione delle O.D.E. si ha che le due funzioni coincidono. Abbiamo quindi la tesi.

□

Otteniamo dunque la formula (1.21) sostituendo nella (1.24) $\omega(\vec{x}, t)$ al posto di $\vec{h}(\vec{x}, t)$.

La formula (1.21) esprime il fatto che muovendosi nel tempo lungo una traiettoria, la vorticità è incrementata rispetto al suo valore in $\vec{x}_0$ al tempo zero da un fattore dipendente dal flusso.

Chiamiamo $J_t(\vec{x}) = \det(\nabla_{\vec{x}} \phi_t(\vec{x}))$, la matrice jacobiana del flusso rispetto allo spazio. Si può dimostrare che

$$\frac{\partial}{\partial t} J = (\nabla \cdot \vec{v})|_{(\phi_t(\vec{x}), t)} J_t(\vec{x})$$

quindi se il fluido è incomprimibile $J_t(\vec{x})$ è costantemente uguale ad uno. Si veda [8] per maggior dettagli.

In particolare se il fluido è bidimensionale

$$\nabla_{\vec{x}}\phi_t(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi_{x_1}^1 & \phi_{x_2}^1 & 0 \\ \phi_{x_1}^2 & \phi_{x_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\vec{\omega}(\vec{x}, 0) = \omega_0(\vec{x})$. In base alla (1.21) abbiamo $\omega(\phi_t(\vec{x}), t) = \omega_0(\vec{x})$, otteniamo ancora quanto già notato in precedenza, ovvero che la vorticità è trasportata invariata dal flusso.

Per uno studio più completo e approfondito del campo di vorticità in due e tre dimensioni si veda [9].

1.3 CIRCOLAZIONE E TEOREMA DI KELVIN

Sia C una curva semplice chiusa definita nel fluido. Chiamiamo $C_t = \phi_t(C)$ la curva ottenuta trasportando C lungo il flusso.

Definizione 1.4 (Circolazione) *Si dice circolazione del fluido attorno alla curva C_t l'integrale*

$$\Gamma(C_t) = \oint_{C_t} \vec{v} \cdot d\vec{s}. \quad (1.26)$$

Teorema 1.7 (Teorema della circolazione di Kelvin) *Sia $\vec{v}(\vec{x}, t)$ il campo di velocità di un fluido ideale incomprimibile e omogeneo. Allora la circolazione $\Gamma(C_t)$ è costante nel tempo.*

Dimostrazione. Sia $\vec{x}(s)$ una parametrizzazione della curva C , $0 \leq s \leq 1$, allora una parametrizzazione naturale della curva C_t è $\phi_t(\vec{x}(s))$, $0 \leq s \leq 1$.

Quindi

$$\frac{d}{dt}\Gamma(C_t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \vec{v}(\phi_t(\vec{x}(s)), t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \phi_t(\vec{x}(s)) ds . \quad (1.27)$$

Portando la derivata sotto segno di integrale nella (1.27) e ricordando che $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(\vec{x}(s)) = \vec{v}(\phi_t(\vec{x}(s)), t)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma(C_t) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \phi_t(\vec{x}(s)) ds \\ &\quad + \int_0^1 \vec{v}(\phi_t(\vec{x}(s)), t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} \phi_t(\vec{x}(s)) \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{D}{Dt} \vec{v}(\phi_t(\vec{x}(s)), t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \phi_t(\vec{x}(s)) ds \\ &\quad + \int_0^1 \vec{v}(\phi_t(\vec{x}(s)), t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \vec{v}(\phi_t(\vec{x}(s)), t) ds . \end{aligned} \quad (1.28)$$

L'ultimo termine della (1.28) è uguale a

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} |\vec{v}(\phi_t(\vec{x}(s)), t)|^2 ds = 0$$

in quanto la curva C è chiusa. Quindi

$$\frac{d}{dt}\Gamma(C_t) = \frac{d}{dt} \oint_{C_t} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_t} \frac{D}{Dt} \vec{v} \cdot d\vec{s} .$$

Per concludere la dimostrazione del teorema di Kelvin facciamo uso della prima equazione del sistema di Eulero (1.5) scritta nelle forma

$$\frac{D}{Dt} \vec{v} = -\nabla p$$

e del fatto che la curva C_t è chiusa. Dunque

$$\frac{d}{dt}\Gamma(C_t) = \oint_{C_t} \frac{D}{Dt} \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \oint_{C_t} \nabla p \cdot d\vec{s} = 0 .$$

□

Osservazione. Se la lunghezza della curva C_t diminuisce (risp. aumenta) durante il moto della curva stessa, allora dalla conservazione della circolazione, $\oint_{C_t} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \text{cost}$, deduciamo che la componente tangenziale della velocità sulla curva aumenta (risp. diminuisce).

Corollario 1.1 *Sia A una superficie con contorno C immersa nel fluido e A_t la superficie ottenuta trasportando A lungo il flusso. Allora il flusso della vorticità attraverso la superficie A_t è costante nel tempo.*

Dimostrazione. Applicando il teorema di Stokes alla (1.26) abbiamo

$$\Gamma(C_t) = \oint_{C_t} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{A_t} \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{A_t} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}.$$

La tesi segue dunque dal teorema della circolazione di Kelvin.

□

Definizione 1.5 (Linea di vortice) *Una linea di vortice (risp. superficie) è una curva (risp. superficie) tangente in ogni suo punto alla vorticità $\vec{\omega}$.*

Teorema 1.8 *Sia A una superficie (risp. linea) che sia inizialmente superficie (risp. linea) di vortice e supponiamo che A si muova con il flusso. Allora A rimane superficie (risp. linea) di vortice per ogni tempo.*

Dimostrazione. Sia $\vec{n}(\vec{x})$ la normale alla superficie A nel punto $\vec{x}$ al tempo $t = 0$, allora $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = 0$ in ogni punto di A . Sia $\tilde{A}$ una qualsiasi porzione della superficie A , allora il flusso di vorticità attraverso $\tilde{A}$ è uguale a zero per $t = 0$. Per il corollario (1.1) si ha che per ogni t

$$\int_{\tilde{A}_t} \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Per l'arbitrarietà della porzione $\tilde{A}$ concludiamo che per ogni t e per ogni $\vec{x} \in A_t$ si ha $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = 0$, quindi A_t è una superficie di vortice.

□

Riportiamo un'altra dimostrazione più diretta del teorema precedente.

Sia C una curva di vortice al tempo $t = 0$

$$C = \{\vec{x}(s) : 0 \leq s \leq 1\},$$

tale che

$$\frac{d}{ds} \vec{x}(s) = \lambda(s) \vec{\omega}_0(\vec{x}(s)) \quad \lambda(s) \neq 0 .$$

Sia C_t la curva ottenuta trasportando C lungo il flusso

$$C_t = \{\phi_t(\vec{x}(s)) : 0 \leq s \leq 1\} .$$

Possiamo affermare che la curva C_t rimane una linea di vortice se dimostriamo che

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi_t(\vec{x}(s)) = \lambda(s) \vec{\omega}(\phi_t(\vec{x}(s)), t) \quad \forall t .$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \phi_t(\vec{x}(s)) &= \nabla_{\vec{x}} \phi_t(\vec{x}(s)) \cdot \frac{d}{ds} \vec{x}(s) \\ &= \nabla_{\vec{x}} \phi_t(\vec{x}(s)) \cdot \lambda(s) \vec{\omega}_0(\vec{x}(s)) . \end{aligned}$$

Quindi per la relazione (1.21) abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi_t(\vec{x}(s)) = \lambda(s) \vec{\omega}(\phi_t(\vec{x}(s)), t)$$

ovvero quello che volevamo mostrare.

1.4 TUBO DI VORTICE E TEOREMA DI HELMHOLTZ

In questa sezione si introduce la nozione di tubo di vortice e intensità di tubo di vortice e se ne studiano le caratteristiche fondamentali. Questi due concetti sono fondamentali per il seguito di questa tesi.

Definizione 1.6 (Tubo di vortice) *Sia C una curva chiusa nello spazio. Si definisce tubo di vortice la parte di spazio delimitata dalle linee di vortice passanti per i punti della curva C . Intenderemo per superficie laterale del tubo di vortice la collezione delle linee di vortice passanti per i punti di C .*

Dalla definizione precedente segue che la vorticità è tangente alla superficie laterale di un tubo di vortice.

Dimostriamo ora un teorema, attribuito ad Helmholtz, in cui si enuncia una importante proprietà dei tubi di vortice e quindi definiamo l'intensità di vorticità di un tubo di vortice.

Teorema 1.9 (Teorema di Helmholtz) *Siano C_1 , C_2 due curve chiuse prese sulla superficie laterale di un tubo di vortice che circondino il tubo stesso, allora*

$$I = \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}. \quad (1.29)$$

Inoltre la quantità I rimane costante nel tempo se il tubo di vortice si muove con il flusso.

Dimostrazione. Chiamiamo S la superficie laterale del tubo di vortice compresa tra le due curve C_1 e C_2 , S_1 e S_2 le superfici bidimensionali il

cui contorno sono la curve C_1 e C_2 e V la regione di spazio di contorno $\Sigma = S \cup S_1 \cup S_2$. Per il teorema della divergenza

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \nabla \cdot \vec{\omega} dx \\ &= \int_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{S_1 \cup S_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{A} + \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{A}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Per definizione di tubo di vortice si ha che S è una superficie di vortice quindi la vorticità è tangente a S in ogni suo punto, quindi

$$\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (1.31)$$

Inoltre per il teorema di Stokes

$$\int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{A} \quad (1.32)$$

$$\int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \int_{S_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{A}. \quad (1.33)$$

Per le relazioni precedenti (1.31), (1.32), (1.33), abbiamo dalla (1.30)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_1 \cup S_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}. \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato la prima parte del teorema.

Per quanto riguarda la seconda parte osserviamo che per il teorema (1.8) un tubo di vortice rimane tale quando è trasportato dal flusso quindi per il teorema della circolazione di Kelvin (1.7) l'intensità rimane costante nel tempo.

□

Definizione 1.7 (Intensità di un tubo di vortice) *Sia T un tubo di vortice e A una qualsiasi sezione di T . Si definisce intensità di vorticità del tubo T la quantità*

$$\int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} . \quad (1.34)$$

Dal teorema di Helmholtz concludiamo che l'intensità di vorticità di un tubo di vortice non dipende dalla particolare superficie A sulla quale si è calcolato l'integrale (1.34) e che non cambia durante il moto del tubo lungo il flusso.

Capitolo 2

MOTO DI PUNTI DI VORTICE

In questo capitolo ci occupiamo del moto di punti di vortice in un fluido bidimensionale. I principali riferimenti bibliografici sono [10] e, soprattutto per le leggi di conservazione, [9].

Supponiamo che all'istante $t = 0$ la vorticità sia concentrata in N punti del piano e zero altrove e ci chiediamo come varia il campo di vorticità con lo scorrere del tempo, ovvero come si muovono i punti di vortice. Ci serviremo essenzialmente della relazione (1.19), cioè del fatto che la vorticità venga trasportata dal flusso. Quindi dobbiamo risalire al campo di velocità a partire da un dato campo di vorticità, cioè invertire la formula (1.6).

2.1 INVERSIONE DEL LAPLACIANO: LEGGE DI BIOT-SAVART

Per definizione, dato un campo di velocità $\vec{v}(\vec{x}, t)$, la vorticità $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ è

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} \quad .$$

Vogliamo invertire la formula precedente, cioè vogliamo scrivere la velocità in funzione della vorticità. Ci serviremo della seguente relazione vettoriale

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u}$$

per calcoliamo il rotore di $\vec{\omega}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\omega} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Essendo il fluido incomprimibile la (2.1) diventa

$$\nabla \times \vec{\omega} = -\Delta \vec{v} \quad .$$

Quindi, conoscendo la vorticità, possiamo risalire alla velocità che, a meno di addizione di un qualunque campo irrotazionale, è data dalla **legge di Biot-Savart**

$$\vec{v} = \nabla \times (-\Delta)^{-1} \vec{\omega} \quad . \tag{2.2}$$

Ci siamo quindi ricondotti al problema di invertire l'operatore laplaciano. Nel caso in esame il dominio di definizione è tutto $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) quindi l'inversione del laplaciano di $\vec{\omega}$ avviene tramite la convoluzione di $\vec{\omega}$ con i nuclei $-\log |\vec{x}|/2\pi$

in dimensione 2 e $1/(4\pi|\vec{x}|)$ in dimensione 3. Quindi rispettivamente al caso 2 o 3-dimensionale abbiamo

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla \times \left(-\frac{\log|\vec{x}|}{2\pi} * \omega(\vec{x}) \right) \quad (2.3)$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla \times \left(-\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} * \vec{\omega}(\vec{x}) \right). \quad (2.4)$$

Nel caso bidimensionale svolgiamo il prodotto esterno e riscriviamo la relazione (2.3) nella forma

$$\vec{v}(x) = \nabla^\perp \Delta^{-1} \vec{\omega}(\vec{x}) = (\partial_{x_2}, -\partial_{x_1}) \left(-\frac{\log|\vec{x}|}{2\pi} * \vec{\omega}(\vec{x}) \right). \quad (2.5)$$

2.2 MOTO DI UN PUNTO DI VORTICE

In questa sezione studiamo il moto di N punti di vortice nel piano. Incominciamo considerando il caso in cui la vorticità al tempo $t = 0$ sia concentrata in un intorno di raggio a dell'origine, cioè

$$\omega(\vec{x}, 0) = \chi_{B_a(0)}(\vec{x}).$$

Ricaviamo il campo di velocità usando la legge di Biot-Savart (2.5) :

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla^\perp \int_{B_a(0)} \frac{\log|\vec{x} - \vec{y}|}{2\pi} d\vec{y}.$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_{B_a(0)} \frac{\log|\vec{x} - \vec{y}|}{2\pi} d\vec{y} = \int_0^a r dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\vec{x} - \vec{y}| d\theta.$$

Per il teorema della media per funzioni armoniche si ha che

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\vec{x} - \vec{y}| d\theta = \log \left(\max(|\vec{x}|, |\vec{y}|) \right) \quad (2.6)$$

quindi, ponendo $|\vec{x}| = R$, $|\vec{y}| = r$, si ha che

se $R > a$

$$\begin{aligned} \int_{B_a(0)} \frac{\log |\vec{x} - \vec{y}|}{2\pi} d\vec{y} &= \int_0^a r \log R dr \\ &= \frac{a^2}{2} \log R, \end{aligned} \quad (2.7)$$

mentre se $R \leq a$

$$\begin{aligned} \int_{B_a(0)} \frac{\log |\vec{x} - \vec{y}|}{2\pi} d\vec{y} &= \int_0^a r dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\vec{x} - \vec{y}| d\theta \\ &= \int_0^R r dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\vec{x} - \vec{y}| d\theta \\ &\quad + \int_R^a r dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\vec{x} - \vec{y}| d\theta \\ &= \int_0^R r \log R dr + \int_R^a r \log r dr \\ &= \frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} + \frac{R^2}{4}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Possiamo a questo punto calcolare la velocità .

Se $|\vec{x}| = |(x_1, x_2)| = R \leq a$ allora per la (2.5) e la (2.8) si ha

$$\begin{aligned} \vec{v}(x_1, x_2) &= (-\partial_{x_2}, -\partial_{x_1}) \left(\frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} (-x_2, x_1) \end{aligned}$$

mentre se $|\vec{x}| = |(x_1, x_2)| = R > a$ allora per la (2.5) e la (2.7) si ha

$$\begin{aligned} \vec{v}(x_1, x_2) &= (-\partial_{x_2}, -\partial_{x_1}) \left(\frac{a^2}{4} \log(x_1^2 + x_2^2) \right) \\ &= \frac{a^2}{2R^2} (-x_2, x_1). \end{aligned}$$

Riassumendo

$$\vec{v}(\vec{x}) = (v_1, v_2)(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} (-x_2, x_1) & R = |(x_1, x_2)| \leq a \\ \frac{a^2}{2R^2} (-x_2, x_1) & R = |(x_1, x_2)| > a \end{cases} \quad (2.9)$$

Notiamo che la velocità è di tipo puramente rotatorio con centro nell'origine degli assi. Il modulo della velocità è proporzionale alla distanza dal centro nei punti di vorticità diversa da zero, invece dove la vorticità è nulla, cioè fuori dalla palla $B_a(0)$, il modulo della velocità decresce a zero man mano che ci si allontana dal centro. Quindi, dal momento che la vorticità è trasportata dal flusso, abbiamo

$$\omega(\vec{x}, t) = \chi_{B_a(0)}(\vec{x}) \quad \forall t \in R .$$

Consideriamo ora il caso in cui la vorticità iniziale $\omega_0(\vec{x})$ sia concentrata nell'origine

$$\omega_0(\vec{x}) = \Gamma \delta(\vec{x}) .$$

Trattiamo questo caso come limite per $a \rightarrow 0$ del medesimo problema con dato iniziale

$$\omega_0(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{\pi a^2} \chi_{B_a(0)}(\vec{x}) .$$

Otteniamo quindi il seguente campo di velocità

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = (v_1, v_2)(\vec{x}, t) = \frac{\Gamma}{2\pi R^2} (-x_2, x_1), \quad R = |\vec{x}| > 0 . \quad (2.10)$$

Quindi il fluido ruota attorno all'origine con velocità angolare sempre più grande man mano che ci si avvicina all'origine. Tuttavia dalla (2.9), per ogni a , la velocità indotta da una distribuzione di vorticità $\chi_{B_a(0)}$ è nulla nel centro della palla $B_a(0)$; inoltre è nulla anche la media della velocità su tutta la palla $B_a(0)$, cioè i punti della palla sono mandati in altri punti della stessa palla e l'unione di tutte le velocità non provoca spostamento della porzione di fluido racchiusa in $B_a(0)$. Queste considerazioni sono vere anche nel caso limite di $a \rightarrow 0$, quindi concludiamo che il punto di vortice non si muove.

Osservazione. La velocità indotta da un punto di vortice è il limite esatto, non approssimato, di quanto calcolato nel caso di una concentrazione di vorticità del tipo $\chi_{B_a(0)}$. Quindi il punto di vortice, fisicamente non realizzabile, approssima bene una situazione reale in cui la vorticità è concentrata in un intorno $B_a(0)$ con a abbastanza piccolo.

2.3 MOTO DI N PUNTI DI VORTICE

Finora abbiamo studiato il moto di un singolo punto di vortice e abbiamo concluso che il punto di vortice non si sposta dalla sua posizione iniziale. Consideriamo ora un sistema in cui la vorticità iniziale sia concentrata in N punti del piano $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ con intensità eventualmente diversa:

$$\omega_0(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) . \quad (2.11)$$

Chiamiamo $X_j(t) = (x_j, y_j)(t)$ la posizione del j -esimo vortice al tempo t . Sappiamo dalla (1.19) che la vorticità è trasportata dal flusso, quindi le traiettorie $X_j(t)$ soddisfano la relazione

$$\frac{d}{dt} X_j(t) = \vec{v}(X_j(t), t) \quad (2.12)$$

e le intensità Γ_j rimangono invariate. Quindi avremo

$$\omega(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \delta(\vec{x} - X_j(t)) . \quad (2.13)$$

La velocità al tempo t dell'equazione (2.12) è quella che si ottiene applicando la legge di Biot-Savart (2.5) alla vorticità al tempo t espressa dalla relazione (2.13). Siccome ogni punto di vortice induce un campo di velocità che non

crea spostamento del vortice stesso, la velocità nel punto $X_j(t)$ è somma dei contributi derivanti dagli altri vortici. Più precisamente dalla (2.12) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_j(t) &= \vec{v}(X_j(t), t) = \nabla^\perp(\Delta)^{-1} \omega(X_j(t), t) \\ &= \nabla^\perp(\Delta)^{-1} \left(\sum_{k \neq j} \Gamma_k \delta(X_j(t) - X_k(t)) \right) \\ &= \nabla^{-1} \left(\frac{\log |\vec{x}|}{2\pi} * \left(\sum_{k \neq j} \Gamma_k \delta(X_j(t) - X_k(t)) \right) \right) \end{aligned}$$

e per la (2.10) possiamo scrivere il sistema

$$\frac{d}{dt} X_j(t) = J \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{X_j(t) - X_k(t)}{|X_j(t) - X_k(t)|^2} \quad j = 1, \dots, N \quad (2.14)$$

con

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spesso è conveniente sostituire $X_j(t)$ con

$$Z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t) \quad j = 1, \dots, N$$

In notazione complessa il sistema (2.14) si riscrive nella forma

$$\frac{d}{dt} Z_j(t) = i \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{Z_j(t) - Z_k(t)}{|Z_j(t) - Z_k(t)|^2} \quad j = 1, \dots, N \quad (2.15)$$

In seguito useremo sempre la forma complessa e il sistema (2.15) è quello che modella l'evoluzione di N punti di vortice nel piano.

2.4 QUANTITA' CONSERVATE E SOLUZIONI PARTICOLARI

Definizione 2.1 (Centro di vorticità) Chiamiamo centro di vorticità il punto

$$C_0 = \frac{1}{\Gamma^*} \left(\sum_{j=1}^N \Gamma_j Z_j(t) \right)$$

dove

$$\Gamma^* = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \neq 0 .$$

Il centro di vorticità è l'analogo del centro di massa nel caso che ci siano dei corpi in luogo di vortici. Dimostriamo che il centro di vorticità è costante nel tempo.

Teorema 2.1 *Le quantità*

$$\bar{C}_0 = \sum_{j=1}^N \Gamma_j Z_j(t) \tag{2.16}$$

$$C_0 = \frac{1}{\Gamma^*} \sum_{j=1}^N \Gamma_j Z_j(t) \quad \text{se} \quad \frac{1}{\Gamma^*} \neq 0 \tag{2.17}$$

sono costanti nel tempo lungo le soluzioni di (2.15).

Dimostrazione. Calcoliamo $\frac{d\bar{C}_0}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}_0}{dt} &= \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{dZ_j(t)}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^N \Gamma_j \left(i \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{Z_j(t) - Z_k(t)}{|Z_j(t) - Z_k(t)|^2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{2\pi} \frac{(Z_j(t) - Z_k(t)) \cdot i(Z_j(t) - Z_k(t))}{|Z_j(t) - Z_k(t)|^2} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Quindi $\bar{C}_0$ e di conseguenza C_0 sono conservate nel tempo.

□

Il nostro scopo è cercare soluzioni particolari del sistema (2.15). Cominciamo col dare qualche definizione.

Definizione 2.2 (Equilibrio fisso) *Una soluzione di equilibrio fisso, o stazionaria, del sistema (2.15) è una soluzione che rimane costante nel tempo, cioè $Z_j(t) = Z_j(0) \forall t \in R$ e per ogni $j = 1, \dots, N$.*

Definizione 2.3 (Equilibrio relativo) *Si dice di equilibrio relativo una soluzione $\{Z_j(t) : j = 1, \dots, N\}$ tale che, ad ogni tempo $t \in R$, la sua forma si ottiene dalla forma della configurazione iniziale $\{Z_j(0) : j = 1, \dots, N\}$ tramite rotazione o traslazione.*

Osserviamo che il sistema (2.15) può essere scritto in forma Hamiltoniana.

Definizione 2.4 (Funzione hamiltoniana) *Definiamo la funzione*

$$H = H(Z_1, \dots, Z_N)$$

come

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_j^N \sum_{k \neq j} \Gamma_j \Gamma_k \ln |Z_j(t) - Z_k(t)| \quad (2.18)$$

Calcoliamo la variazione della funzione H rispetto alla funzione Z_j .

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta Z_j} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq j} \Gamma_j \Gamma_k \frac{Z_j - Z_k}{|Z_j - Z_k|^2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq j} \Gamma_j \Gamma_k \frac{Z_j - Z_k}{|Z_j - Z_k|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq j} \Gamma_j \Gamma_k \frac{Z_j - Z_k}{|Z_j - Z_k|^2} . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se moltiplichiamo la formula (2.15) per Γ_j , per la (2.19) abbiamo che

$$\Gamma_j \frac{d}{dt} Z_j(t) = i \frac{\delta H}{\delta \bar{Z}_j} \quad j = 1, \dots, N \quad (2.20)$$

In forma più compatta possiamo scrivere il sistema (2.15) nel seguente modo

$$\Gamma \cdot \frac{d}{dt} Z(t) = i \nabla H . \quad (2.21)$$

La funzione H è quindi la funzione Hamiltoniana associata al sistema di moto di N punti di vortice nel piano. La funzione Hamiltoniana di un sistema dinamico ha la proprietà di mantenersi costante nel tempo se calcolata sulle soluzioni del sistema, cioè di essere un integrale primo. Oltre alla funzione Hamiltoniana possiamo trovare altre quantità conservate dalle soluzioni del sistema (2.15).

Teorema 2.2 *La quantità*

$$I = \sum_{j=1}^N \Gamma_j |Z_j|^2 \quad (2.22)$$

è conservata dalle soluzioni $Z_j(t)$ del sistema (2.15).

Dimostrazione. Sia $\{Z_j\}_{j=1}^N$ soluzione del sistema (2.15). Dimostriamo che

$$\frac{d}{dt} I = 0 . \quad (2.23)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= \sum_{j=1}^N 2\Gamma_j Z_j \cdot \frac{d}{dt} Z_j \\ &= \sum_{j=1}^N 2\Gamma_j Z_j \left(i \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{z_j - Z_k}{|Z_j - Z_k|^2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{\pi} \frac{(Z_j - Z_k) \cdot i(Z_j - Z_k)}{|Z_j - Z_k|^2} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

□

Definizione 2.5 *Poniamo*

$$l_{jk}(t) = |(Z_j - Z_k)(t)|$$

la distanza al tempo t tra due punti di vorticità.

Se $N \geq 3$ da (2.15) si ottiene l'equazione

$$\frac{d}{dt} l_{jk}^2(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{r \neq j \neq k} \Gamma_r \delta_{rjk} A_{rjk}(t) \left(\frac{1}{l_{rk}^2(t)} - \frac{1}{l_{rj}^2(t)} \right) \quad (2.24)$$

dove $\delta_{rjk} = 1$ se il triangolo di vertici $(Z_r, Z_j, Z_k)(t)$ è orientato in senso antiorario, $\delta_{rjk} = -1$ altrimenti e $A_{rjk}(t)$ è l'area del triangolo.

Cerchiamo ora particolari soluzioni del sistema (2.15). Consideriamo inizialmente $N = 2$. In questo caso l'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \Gamma_2 2 \ln |Z_1(t) - Z_2(t)|$$

quindi la distanza $d = |Z_1(t) - Z_2(t)|$ è costante nel tempo. Allora si ha che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_1(t) &= i \frac{\Gamma(2)}{2\pi} \frac{Z_1(t) - Z_2(t)}{d^2} \\ &= \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi d^2} i \left(\frac{\Gamma_2 Z_1(t) - \Gamma_2 Z_2(t)}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right) \\ &= \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi d^2} i \left(\frac{\Gamma_1 Z_1(t) - \Gamma_1 Z_1(t) + \Gamma_2 Z_1(t) - \Gamma_2 Z_2(t)}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right) \\ &= \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi d^2} i \left(Z_1(t) - \frac{\Gamma_1 Z_1(t) + \Gamma_2 Z_2(t)}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right) \end{aligned}$$

e lo stesso per $Z_2(t)$. Quindi, ricordando la definizione di centro di vorticità (2.1), se $\Gamma^* \neq 0$ i due punti di vortice ruotano attorno al centro di vorticità con velocità angolare $\nu = \frac{\Gamma^*}{2\pi d^2}$.

Se invece $\Gamma^* = 0$ i due punti di vorticità traslano con velocità costante uguale a $((\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)/2)^{1/2}/(2\pi d)$. Sia infatti $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$. Allora

$$\frac{d}{dt}Z_1(t) = \frac{i}{2\pi} \frac{\Gamma_2(Z_1(t) - Z_2(t))}{d^2}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_2(t) &= \frac{i}{2\pi} \frac{\Gamma_1(Z_2(t) - Z_1(t))}{d^2} \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{\Gamma_2(Z_1(t) - Z_2(t))}{d^2} \\ &= \frac{d}{dt}Z_1(t) \end{aligned}$$

quindi la velocità dei due punti di vortice è la stessa ed è perpendicolare rispetto alla congiungente tra essi. Calcoliamo il modulo della velocità.

$$\begin{aligned} 2 \left| \frac{d}{dt}Z_2(t) \right|^2 &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{|Z_1(t) - Z_2(t)|^2}{d^4} - \frac{1}{4\pi^2} \frac{|Z_2(t) - Z_1(t)|^2}{d^4} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}{d^4} \right) d^2. \end{aligned}$$

Quindi i due punti di vortice traslano con velocità costante pari a

$$\frac{1}{2\pi d} \left(\frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}{2} \right)^{1/2}.$$

Sia ora $N = 3$. Vediamo quali sono le condizioni iniziali affinché si abbia una soluzione di equilibrio fisso. Le equazioni di moto, date dal sistema (2.15), sono

$$\frac{d}{dt}Z_1(t) = \frac{i}{2\pi} \left(\Gamma_2 \frac{Z_1(t) - Z_2(t)}{|Z_1(t) - Z_2(t)|^2} + \Gamma_3 \frac{Z_1(t) - Z_3(t)}{|Z_1(t) - Z_3(t)|^2} \right) \quad (2.25)$$

$$\frac{d}{dt}Z_2(t) = \frac{i}{2\pi} \left(\Gamma_1 \frac{Z_2(t) - Z_1(t)}{|Z_2(t) - Z_1(t)|^2} + \Gamma_3 \frac{Z_2(t) - Z_3(t)}{|Z_2(t) - Z_3(t)|^2} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt}Z_3(t) = \frac{i}{2\pi} \left(\Gamma_1 \frac{Z_3(t) - Z_1(t)}{|Z_3(t) - Z_1(t)|^2} + \Gamma_2 \frac{Z_3(t) - Z_2(t)}{|Z_3(t) - Z_2(t)|^2} \right) \quad (2.27)$$

Supponiamo di aver fissato i punti $Z_1(0)$, $Z_3(0)$. Per avere una soluzione di equilibrio fisso dobbiamo annullare i termini di destra delle relazioni precedenti. Poniamo quindi $Z_2(0)$ tale che

$$Z_2(0) - Z_1(0) = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}(Z_1(0) - Z_3(0)) \quad (2.28)$$

così da annullare il termine di destra della (2.25). Quindi sostituiamo nella (2.26) la relazione (2.28) per Z_2 e poniamo uguale a zero :

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_1 \frac{Z_2(t) - Z_1(t)}{|Z_2(t) - Z_1(t)|^2} + \Gamma_3 \frac{Z_2(t) - Z_3(t)}{|Z_2(t) - Z_3(t)|^2} = \\ &= \frac{\Gamma_1 \Gamma_3}{\Gamma_2} \frac{Z_1 - Z_3}{|Z_1 - Z_3|^2} + \Gamma_3 \frac{Z_1 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}(Z_1 - Z_3) - Z_3}{|Z_1 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}(Z_1 - Z_3) - Z_3|^2} \\ &= \frac{\Gamma_1 \Gamma_3}{\Gamma_2} \frac{Z_1 - Z_3}{|Z_1 - Z_3|^2} + \Gamma_3 \frac{\left(1 + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3}\right)(Z_1 - Z_3)}{\left(1 + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3}\right)^2 |Z_1 - Z_3|^2} \\ &= \frac{Z_1 - Z_3}{|Z_1 - Z_3|^2} \left(\frac{\Gamma_1 \Gamma_3}{\Gamma_2} + \frac{\Gamma_3^2}{\Gamma_2 + \Gamma_3} \right) . \end{aligned}$$

Otteniamo quindi la seguente relazione per le Γ_j :

$$\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_1 \Gamma_3 = 0 .$$

Ovviamente se i primi due punti di vortice non si muovono, per la conservazione del centro di vorticità rimane fisso anche il terzo punto di vortice. Riassumiamo il risultato ottenuto nel seguente teorema.

Teorema 2.3 *Le uniche soluzioni di equilibrio fisso per il moto di tre punti di vortice nel piano sono date dalle seguenti condizioni iniziali :*

$$\begin{aligned} Z_2(0) - Z_1(0) &= \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}(Z_1(0) - Z_3(0)) \\ \Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_1 \Gamma_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Inoltre abbiamo due possibili soluzioni di equilibrio relativo.

La prima si ottiene a partire da valori iniziali $(Z_1(0), Z_2(0), Z_3(0))$ posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato $d > 0$. Per la formula (2.24) la distanza tra i punti di vortice si mantiene costante uguale a d e ogni punto di vorticità ruota attorno al centro di vorticità con velocità angolare $\nu = \Gamma^*/2\pi d^2$.

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_1(t) &= \frac{i}{2\pi} \left(\Gamma_2 \frac{(Z_1(t) - Z_2(t))}{d^2} + \Gamma_3 \frac{(Z_1(t) - Z_3(t))}{d^2} \right) \\ &= \frac{i}{2\pi d^2} \left((\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) Z_1(t) - (\Gamma_1 Z_1(t) + \Gamma_2 Z_2(t) + \Gamma_3 Z_3(t)) \right) \\ &= i \frac{\Gamma^*}{2\pi d^2} (Z_1(t) - C_0) \end{aligned}$$

e analogamente per Z_2 e Z_3 . Se $\Gamma^* = 0$ allora traslano con velocità uguale a $\left((\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)/2 \right)^{1/2} / 2\pi d$.

Poniamo infatti $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_1(t) &= \frac{i}{2\pi} \left(\Gamma_2 \frac{(Z_1(t) - Z_2(t))}{d^2} + \Gamma_3 \frac{(Z_1(t) - Z_3(t))}{d^2} \right) \\ &= \frac{i}{2\pi d^2} \left(-\Gamma_1 Z_1(t) - \Gamma_2 Z_2(t) - \Gamma_3 Z_3(t) \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_2(t) &= \frac{i}{2\pi} \left(\Gamma_1 \frac{(Z_2(t) - Z_1(t))}{d^2} + \Gamma_3 \frac{(Z_2(t) - Z_3(t))}{d^2} \right) \\ &= \frac{i}{2\pi d^2} \left(-\Gamma_1 Z_1(t) - \Gamma_2 Z_2(t) - \Gamma_3 Z_3(t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} Z_1(t) . \end{aligned}$$

Analogamente

$$\frac{d}{dt} Z_1(t) = \frac{d}{dt} Z_2(t) = \frac{d}{dt} Z_3(t) .$$

Per la conservazione della quantità (2.16) abbiamo che i tre punti di vortice traslano con la stessa velocità costante nel tempo.

Nella figura (2.1) è rappresentata la soluzione per tre punti di vortice di intensità $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 1$, $\Gamma_3 = -2$, con posizione iniziale rispettivamente in $(1, 0)$, $(-0.5, \sqrt{3}/2)$, $(-0.5, -\sqrt{3}/2)$.

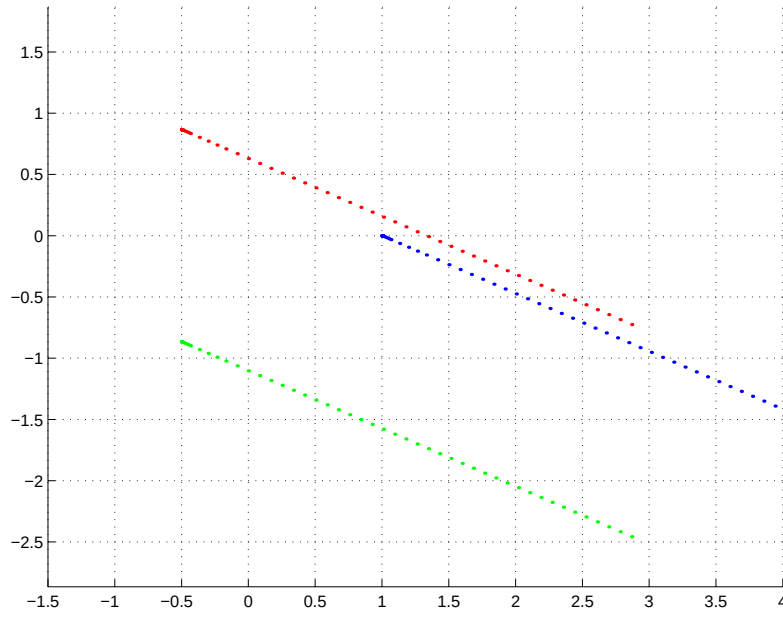


Figura 2.1:

L'altra configurazione iniziale per cui si ha una soluzione di equilibrio relativo è quella in cui $(Z_1(0), Z_2(0), Z_3(0))$ siano allineati e la funzione

$$f(l_{12}, l_{23}, l_{31}) = A = (r(r - l_{12})(r - l_{23})(r - l_{31}))^{1/2}$$

con $r = (l_{12} + l_{23} + l_{31})/2$ il semiperimetro del triangolo, soddisfi l'equazione

$$\frac{d}{dt} f(l_{12}, l_{23}, l_{31}) = 0 .$$

Se $N \geq 4$ allora punti di vorticità della stessa intensità Γ e posti ai vertici di un N-poligono regolare generano una soluzione di equilibrio relativo.

In questo caso i vortici ruotano attorno al centro di vorticità con velocità angolare

$$\nu = \nu(\Gamma, N, R) = \Gamma(N - 1)/4\pi R^2 \quad (2.29)$$

dove R è il raggio della circonferenza circoscritta al poligono. Quindi se poniamo il centro di vorticità nell'origine abbiamo :

$$Z_j(t) = R e^{2\pi i(j-1)/N} e^{i\nu t} \quad j = 1, \dots, N \quad (2.30)$$

Inoltre, data una soluzione di equilibrio relativo del tipo precedente (2.30), si ottiene una soluzione di equilibrio relativo per $(N + 1)$ vortici, ponendo l' $(N + 1)$ -esimo vortice di arbitraria intensità $p\Gamma$ nel centro di vorticità. Tale configurazione ruota attorno al centro di vorticità con frequenza $\nu = \nu(\Gamma, N, R, p) = \Gamma(N - 1 + 2p)/4\pi R^2$ cioè , supposto il centro di vorticità nell'origine,

$$\begin{cases} Z_j(t) = R e^{2\pi i(j-1)/N} e^{i\nu t}, & j = 1, \dots, N \\ Z_{N+1}(t) = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

In particolare se $p = (1 - N)/2$ si ha una soluzione di equilibrio fisso.

In figura (2.2) è rappresentata l'evoluzione di tre punti di vortice. Le posizioni iniziali dei punti di vortice colorati in blu, rosso, verde, sono rispettivamente $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -2)$, mentre le intensità sono tutte uguali e poste uguale ad uno.

In figura (2.3) si considerano cinque punti di vortice rispettivamente rappresentati in blu, rosso, verde, giallo e nero.

I dati iniziali sono $(0.1, 0.1)$, $(-0.3, 0)$, $(1, 0.2)$, $(0.5, 1)$, $(0, -0.2)$, e le intensità $(-0.5, -0.5, 0.5, 0.7, -0.7)$.

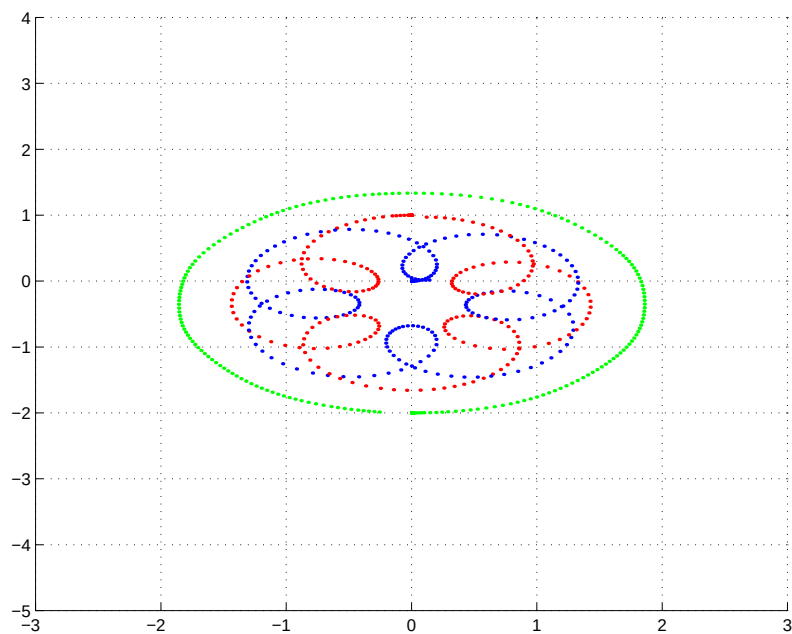


Figura 2.2:

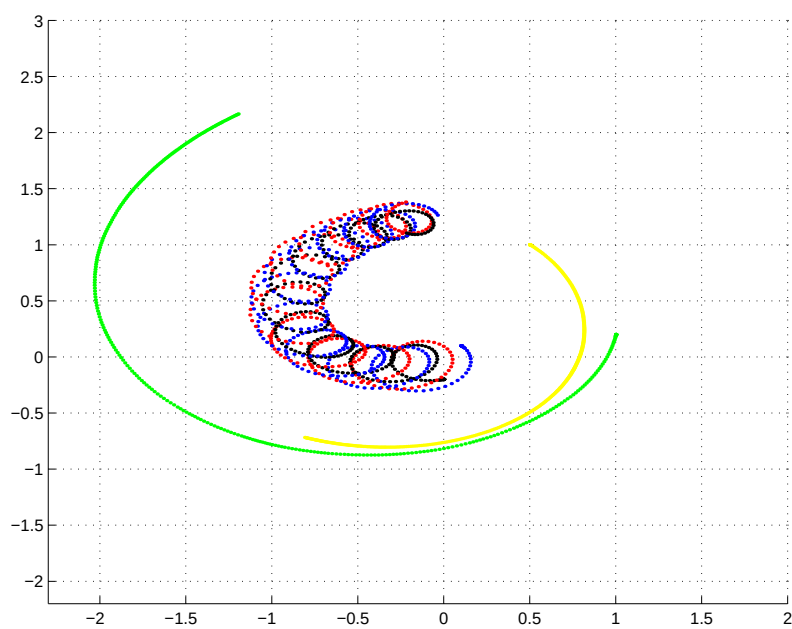


Figura 2.3:

Capitolo 3

MOTO DI UN SINGOLO FILAMENTO VORTICOSO

In questo capitolo supponiamo di avere un fluido immerso in $\mathbb{R}^3$ e la vorticità iniziale concentrata su un unico filamento. Affronteremo il problema dell'autoinduzione di velocità da parte di un filamento di vortice e applicheremo i risultati ottenuti al caso particolare di un filamento quasi parallelo ad un asse. I contenuti di questo capitolo, se non espressamente indicato, sono tratti da [10].

Cominciamo con la definizione di filamento di vortice.[9]

Definizione 3.1 (Filamento di vortice) *Si definisce filamento di vortice un tubo di vortice isolato di piccola¹ sezione trasversale dA , con una distribuzione costante di vorticità attraverso il tubo. L'intensità del filamento di*

¹Si suppone che il raggio σ della sezione del vortice e il raggio R di curvatura del filamento soddisfino $\sigma/R \ll 1$

vortice è data da

$$\Gamma = \int \omega dA . \quad (3.1)$$

La posizione spazio-temporale del filamento è rappresentata dalla linea centrale del tubo

$$\vec{X}(s, t) \quad (3.2)$$

dove s è il parametro lungo il tubo, tipicamente il parametro arco.

Ci chiediamo quali siano le equazioni di moto di questo filamento. Per il teorema (1.8) il filamento di vortice rimane tale per ogni tempo. Quindi dobbiamo calcolare il campo di velocità indotto dal filamento vorticoso nei punti in cui è presente il filamento stesso. Nel caso bidimensionale avevamo visto che un solo punto di vortice nel piano rimane fermo, mentre se ci sono più punti di vorticità ognuno risente della presenza degli altri. Nel caso tridimensionale in ogni punto del filamento la velocità sarà indotta dalla vorticità presente in tutti gli altri punti del filamento stesso.

Supponiamo che al tempo t il filamento vorticoso abbia equazione $\vec{X}(s, t)$ con s parametro arco. Nel caso limite in cui la sezione dA del filamento sia prossima a zero, il campo di vorticità è dato da

$$\vec{\omega}(\vec{y}, t) = \Gamma \int \delta(\vec{y} - \vec{X}(s, t)) \frac{\partial \vec{X}(s, t)}{\partial s} ds . \quad (3.3)$$

Per trovare la velocità indotta dal filamento di vortice dobbiamo usare la legge di Biot-Savart (2.4) e otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}, t) &= -\nabla \times \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} * \vec{\omega} \right) \\ &= -\nabla \times \int \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \vec{\omega}(\vec{y}, t) d\vec{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \nabla \times \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \vec{\omega}(\vec{y}, t) \right) d\vec{y} \\
&= - \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \times \vec{\omega}(\vec{y}, t) d\vec{y} .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sostituendo la vorticità $\vec{\omega}(\vec{y}, t)$ data dalla (3.3) otteniamo

$$\begin{aligned}
\vec{v}(\vec{x}, t) &= - \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \times \Gamma \int \delta(\vec{y} - \vec{X}(s, t)) \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} ds \right) d\vec{y} \\
&= - \frac{1}{4\pi} \Gamma \int \frac{(\vec{x} - \vec{X}(s, t))}{|\vec{x} - \vec{X}(s, t)|^3} \times \frac{\partial \vec{X}(s, t)}{\partial s} ds .
\end{aligned}$$

Quindi formalmente il campo di velocità al tempo t generato da un filamento di vortice di vorticità Γ e equazione $\vec{X}(s, t)$ è dato dalla formula

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = - \frac{1}{4\pi} \Gamma \int \frac{(\vec{x} - \vec{X}(s, t))}{|\vec{x} - \vec{X}(s, t)|^3} \times \frac{\partial \vec{X}(s, t)}{\partial s} ds . \tag{3.5}$$

Per descrivere il moto del filamento dobbiamo calcolare la velocità nei punti del filamento stesso, cioè dobbiamo calcolare $\vec{v}(\vec{X}(s, t), t)$. Questo problema è detto **problema dell'autoinduzione**. Il problema maggiore è rappresentato dalla valutazione asintotica dell'integrale di Biot-Savart (3.5) quando $\vec{x}$ è vicino ad un punto del filamento. Infatti l'integrand diverge quando $\vec{x}$ tende a $\vec{X}(s, t)$ e la velocità indotta dal filamento va come $1/|\vec{x} - \vec{X}(s, t)|$, cioè la velocità tende all'infinito quando è calcolata nei punti del filamento. Questo tipo di divergenza è presente anche nel caso bidimensionale: ogni punto di vortice genera, in un punto distante R , un campo di velocità di tipo rotazionale di modulo inversamente proporzionale a R . D'altra parte, come illustrato nel capitolo 2, il punto di vortice non si muove. Lo stesso discorso vale, nel caso tridimensionale, per l'autoinduzione di velocità di un filamento di vortice perfettamente diritto; le complicanze sorgono quando il filamento presenta una curvatura diversa da zero.

Fin dall'inizio del secolo scorso sono stati proposti modelli diversi per l'autoinduzione di un filamento di vortice. In questa tesi seguiamo il modello della L.I.A. (*Local Induction Approximation*) proposto per la prima volta da Da Rios nel 1906 [4]. Con questo modello calcoliamo una approssimazione della velocità nei punti vicini ad un filamento di vortice, che non presenti autointersezioni e la cui linea centrale $\vec{X}(s, t)$ sia abbastanza liscia rispetto alle sue componenti.

Mostriamo inoltre che l'evoluzione di un filamento di vortice ottenuta mediante la L.I.A. è strettamente correlata con un'equazione di Schrödinger non lineare [5]. Infine applichiamo i risultati ottenuti al caso di un filamento quasi parallelo.

3.1 IL MODELLO L.I.A.

Nel paragrafo precedente abbiamo scritto la formula della velocità indotta da un filamento di vortice. Vogliamo poter scrivere la velocità in ogni punto del filamento nella forma più esplicita possibile. Uno dei problemi della formula (3.5) è che l'integrale è definito lungo tutto il filamento e che, problema ancor maggiore, l'integranda è singolare nel punto in cui si sta calcolando la velocità.

Uno dei modelli più usati per descrivere l'induzione della velocità da parte di un filamento di vortice è il modello L.I.A., risalente agli inizi del secolo scorso e sviluppato successivamente da vari autori tra cui Arms, Hama [2], Klein, Majda, Damodaran [7], Ricca [11].

Il modello proposto si basa sull'assunzione che l'induzione della velocità avvenga solo localmente. Se il punto $\vec{x}$ è prossimo al punto $\vec{X}(s, t)$ del fila-

mento, allora si assume che la velocità in $\vec{x}$ sia indotta principalmente dalla vorticità presente nei punti limitrofi a $\vec{X}(s, t)$, mentre la velocità indotta da porzioni lontane del filamento vorticoso può essere trascurata. Queste ipotesi permettono di analizzare l'evoluzione di un filamento di vortice in termini della propria geometria intrinseca.

Mostriamo ora in dettaglio come calcolare l'approssimazione della velocità indotta da un filamento di vortice. Illustriamo il ragionamento seguito da Ponce in [10]. L'idea è quello di calcolare la velocità non direttamente in $\vec{X}(s)$, ma in un punto distante σ da $\vec{X}(s)$, appartenente al piano normale al filamento passante per $\vec{X}(s)$. Poi con un processo di limite per $\sigma \rightarrow 0$ otteniamo una stima della velocità nel punto $\vec{X}(s)$.

Fissiamo il tempo t e poniamo $\vec{X}(s)$ la parametrizzazione del filamento vorticoso, s parametro arco. Sviluppiamo la curva $\vec{X}(s)$ in serie di Taylor attorno a $\vec{X}(0)$:

$$\begin{aligned}\vec{X}(s) - \vec{X}(0) &= \frac{\partial}{\partial s} \vec{X}(0)s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \vec{X}(0)s^2 + O(s^3) \\ &= s\hat{t} + \frac{1}{2}k(0)s^2\hat{n} + O(s^3)\end{aligned}\tag{3.6}$$

dove $\hat{t}$, $\hat{n}$ indicano, rispettivamente, il versore tangente e normale in $\vec{X}(0)$, mentre $k(0)$ indica la curvatura in $\vec{X}(0)$. Dalla (3.6) otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial s}(\vec{X}(s) - \vec{X}(0)) = \hat{t} + k(0)s\hat{n} + O(s^2)\tag{3.7}$$

quindi da (3.6) e (3.7) possiamo calcolare

$$\begin{aligned}(\vec{X}(s) - \vec{X}(0)) \times \frac{\partial}{\partial s}(\vec{X}(s) - \vec{X}(0)) &= \\ (s\hat{t} + \frac{1}{2}k(0)s^2\hat{n} + O(s^3)) \times (\hat{t} + k(0)s\hat{n} + O(s^2)) &= \\ (\hat{t} \times \hat{t})s + (\frac{1}{2}k(0)\hat{n} \times \hat{t} + k(0)\hat{t} \times \hat{n})s^2 + O(s^3) &= \\ (\frac{1}{2}k(0)\hat{t} \times \hat{n})s^2 + O(s^3) .\end{aligned}$$

Inoltre, sempre da (3.6) si ha

$$\begin{aligned}
 |\vec{X}(s) - \vec{X}(0)|^2 &= \left| \left(s \hat{t} + \frac{1}{2} k(0) s^2 \hat{n} + O(s^3) \right)^2 \right| \\
 &= s^2 + k(0) s^3 \hat{t} \cdot \hat{n} + O(s^3) \\
 &= s^2 \left(1 + (k(0) \hat{t} \cdot \hat{n}) s \right) + O(s^3)
 \end{aligned}$$

Sia $\vec{z}$ un punto nel piano normale alla curva passante per $\vec{X}(0)$.

Allora, approssimato al primo ordine rispetto ad s , si ha

$$|\vec{z} + X(0) - X(s)|^2 = (|\vec{z}|^2 + s^2)$$

e

$$|\vec{z} + X(0) - X(s)|^3 = (|\vec{z}|^2 + s^2)^{3/2}$$

A questo punto possiamo calcolare la velocità approssimata nel punto $\vec{z}$:

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(\vec{z}) &\approx -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^L \frac{\vec{z} + (\vec{X}(0) - \vec{X}(s))}{|\vec{z} + (\vec{X}(0) - \vec{X}(s))|^3} \times \frac{\partial}{\partial s}(\vec{X}(s)) ds \\
 &\approx -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^L \frac{\vec{z}}{(|\vec{z}|^2 + s^2)^{3/2}} \times \frac{\partial}{\partial s}(\vec{X}(s)) ds \\
 &\quad + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^L \frac{\frac{1}{2}(k(0)\hat{t} \times \hat{n})s^2}{(|\vec{z}|^2 + s^2)^{3/2}} ds \\
 &\approx -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^L \frac{\vec{z} \times \hat{t}}{(|\vec{z}|^2 + s^2)^{3/2}} ds + \frac{\Gamma}{4\pi} k(0) \hat{b} \int_0^L \frac{s^2}{(|\vec{z}|^2 + s^2)^{3/2}} ds .
 \end{aligned}$$

Il primo integrale è uguale a

$$-\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z^\perp}{|\vec{z}|^3} \int_0^\infty \frac{ds}{(\frac{s^2}{|\vec{z}|^2} + 1)^{3/2}} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z^\perp}{|\vec{z}|^2} \int_0^\infty \frac{ds/|\vec{z}|}{(\frac{s^2}{|\vec{z}|^2} + 1)^{3/2}} \approx -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z^\perp}{|\vec{z}|^2}$$

mentre il secondo integrale è approssimato da

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma}{4\pi} k(0) \hat{b} \int_0^L \frac{s^2}{(|\vec{z}|^2 + s^2)^{3/2}} ds &= \frac{\Gamma}{4\pi} k(0) \hat{b} \int_0^{L/|\vec{z}|} \frac{s^2/|\vec{z}|^2}{(\frac{s^2}{|\vec{z}|^2} + 1)^{3/2}} ds \\
 &\approx \frac{\Gamma}{4\pi} k(0) \log \left(\frac{L}{|\vec{z}|} \right) \hat{b}
 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\vec{v}(\vec{z}) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z^\perp}{|\vec{z}|^2} + \frac{\Gamma}{4\pi} k(0) \log\left(\frac{L}{|\vec{z}|}\right) \hat{b} + O(1) . \quad (3.8)$$

La velocità ottenuta in (3.8) è somma di tre parti. La prima è un termine di rotazione, analogo a quello che si ottiene nel caso bidimensionale. Tale termine, di modulo tendente all'infinito per $|\vec{z}| \rightarrow 0$, mediato su un intorno del punto $\vec{X}(0)$ risulta uguale a zero, cioè non provoca spostamento del punto $\vec{X}(0)$. Il secondo termine, che pure tende all'infinito per $|\vec{z}| \rightarrow 0$, è un contributo alla velocità caratteristico del caso tridimensionale ed è diretto lungo la binormale e proporzionale alla curvatura del filamento nel punto $\vec{X}(0)$. Il termine finito invece indica il contributo alla velocità dovuto dalle porzioni di filamento distanti dal punto che si sta considerando. Nel caso limite in cui $|\vec{z}| \rightarrow 0$ la parte principale tende all'infinito, quindi la parte finita può essere trascurata. Questo equivale a tralasciare gli effetti dovuti dalla vorticità distante dal punto considerato cioè si ritiene che l'induzione della velocità avvenga solo localmente. Dal momento che il logaritmo di $\frac{1}{|\vec{z}|}$ varia lentamente quando $|\vec{z}| \rightarrow 0$, possiamo sostituirlo con una costante e poichè siamo interessati ad una analisi qualitativa, più che quantitativa, del fenomeno, possiamo riscalarare convenientemente la variabile temporale e scrivere la velocità nella forma finale

$$\vec{v} = \Gamma k \hat{b} \quad (3.9)$$

dove $\hat{b}$ indica il versore binormale. La formula precedente prende il nome di **L.I.E.** (*Localized self-Induction Equation*).

Quindi secondo il modello della L.I.A. il filamento vorticoso in ogni suo punto si muove lungo la binormale calcolata nel punto e direttamente pro-

porzionale alla curvatura del filamento. Osserviamo dalla formula (3.9) che la velocità dipende dalle grandezze intrinseche del filamento vorticoso.

Ricordiamo che data una curva $\vec{X}(s)$ regolare quanto basta, con s parametro arco, allora, per ogni punto della curva, valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{d}{ds}\vec{X} = \hat{t} \ , \quad \frac{d^2}{ds^2}\vec{X} = k \hat{n} \quad (3.10)$$

dove k indica la curvatura.

Scriviamo quindi la velocità (3.9) in termini della curva $\vec{X}(s, t)$:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{X}(s, t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{X}(s, t) = \Gamma k(\vec{X}(s, t)) \hat{b} \\ &= \Gamma \frac{\partial}{\partial s}\vec{X}(s, t) \times \frac{\partial^2}{\partial s^2}\vec{X}(s, t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

H.Hasimoto ha messo in luce un interessante legame tra l'evoluzione del filamento $\vec{X}(s, t)$ e un'equazione di Schrödinger non lineare. [5] oppure [9] (336-338).

In particolare siano, per ogni tempo t , $k(s, t)$ e $\tau(s, t)$ rispettivamente la curvatura e la torsione della curva $\vec{X}(s, t)$.

Definizione 3.2 Definiamo la **funzione del filamento** $\Psi(s, t)$ in termini della curvatura $k(s, t)$ e della torsione $\tau(s, t)$ come segue:

$$\begin{aligned} \Psi(s, t) &= k(s, t)e^{i\phi} \\ \phi &= \int_0^s \tau(l, t) dl \ . \end{aligned}$$

Dalla definizione precedente segue

$$k = |\Psi| \quad (3.12)$$

$$\tau = \phi' \ . \quad (3.13)$$

Allora la funzione $\Psi(s, t)$ soddisfa la seguente equazione di Schrödinger non lineare

$$-i\dot{\Psi} = \Psi'' + \frac{1}{2}|\Psi|^2\Psi . \quad (3.14)$$

Quindi dato il filamento di vortice nella sua posizione iniziale $\vec{X}(s, 0)$, si calcola la curvatura $k(s, 0)$ e la torsione $\tau(s, 0)$ e si scrive la funzione $\Psi(s, 0)$. Si risolve l'equazione (3.14) con dato iniziale $\Psi(s, 0)$ e si ricava $\Psi(s, t)$. Usando poi le relazioni (3.12) e (3.13) si ottengono la curvatura $k(s, t)$ e la torsione $\tau(s, t)$ al tempo t . Infine tramite le equazioni di Frenet-Serret che legano tra loro curvatura e torsione con la base $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ si ricava la curva $\vec{X}(s, t)$ che rappresenta la posizione al tempo t del filamento di vortice.

Nella prossima sezione applichiamo il risultato ottenuto riguardo all'induzione della velocità di un filamento vorticoso al caso di un filamento quasi parallelo ad un asse.

3.2 EQUAZIONE DI MOTO PER UN FILAMENTO DI VORTICE QUASI PARALLELO

Lo scopo di questa sezione è applicare l'equazione della velocità ottenuta mediante il modello L.I.A. al caso di un filamento vorticoso quasi parallelo ad un asse. Per filamento vorticoso quasi parallelo si intende che la vorticità è concentrata su una curva che sia una piccola perturbazione di una linea retta, cioè

$$\vec{X}(\sigma, t) = (\varepsilon\vec{\psi}(\sigma, t), \sigma) \quad (3.15)$$

con ε piccolo e $\vec{\psi}(\sigma) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Supponiamo che un filamento di vortice al tempo t abbia equazione $\vec{X}(x) = (X_1(x), X_2(x), x)$. Calcoliamo la velocità nel punto $\vec{X}(x)$ a partire dalla relazione 3.11. Indichiamo con

$$\vec{X}' = \frac{d}{dx} \vec{X} = \left(\frac{d}{dx} X_1, \frac{d}{dx} X_2, 1 \right)$$

allora

$$ds = |\vec{X}'(x)| dx . \quad (3.16)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \hat{t} \times \hat{n} , \\ k(s) \hat{b} &= \hat{t}(s) \times \frac{d}{ds} \hat{t}(s) \end{aligned} \quad (3.17)$$

e

$$\hat{t}(\vec{x}) = \frac{\vec{X}'(x)}{|\vec{X}'(x)|} . \quad (3.18)$$

Da (3.16) e (3.18) segue che

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \hat{t}(x) &= \left(\frac{d}{dx} \frac{\vec{X}'(x)}{|\vec{X}'(x)|} \right) \frac{1}{|\vec{X}'(x)|} \\ &= \frac{1}{|\vec{X}'(x)|} \left(\frac{\vec{X}''(x)}{|\vec{X}'(x)|} - \frac{\vec{X}'(x) \cdot \vec{X}''(x)}{|\vec{X}'(x)|^3} \vec{X}'(x) \right) \end{aligned}$$

Quindi dalla (3.11), per la relazione (3.17) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(x) = \Gamma \frac{\vec{X}'(x) \times \vec{X}''(x)}{|\vec{X}'(x)|^3} .$$

Applichiamo ora la relazione precedente al caso di filamenti di vortice quasi paralleli all'asse z . Poniamo

$$\vec{X}(x) = \vec{X}(s) = (\varepsilon \vec{\psi}(s), s) \quad (3.19)$$

con ε piccolo e $\vec{\psi}(s) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \vec{X}' \times \vec{X}'' &= \left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon\psi'_1 & \varepsilon\psi'_2 & 1 \\ \varepsilon\psi''_1 & \varepsilon\psi''_2 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{array} \right\| \\ &= -\varepsilon\psi''_2 \vec{i} + \varepsilon\psi''_1 \vec{j} + O(\varepsilon^2) . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Se scriviamo la funzione $\vec{\psi}(s) = (\psi_1, \psi_2)(s)$ in forma complessa

$$\psi(s) = \psi_1(s) + i\psi_2(s)$$

la formula (3.20) assume la forma

$$\vec{X}' \times \vec{X}'' = i\varepsilon\phi'' + O(\varepsilon^2) . \quad (3.21)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} |\vec{X}'|^{-3} &= |(\varepsilon\psi', 1)|^{-3} \\ &= \left(\varepsilon^2|\psi'|^2 + 1 \right)^{-\frac{3}{2}} = 1 + O(\varepsilon^2) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Quindi, per l'ipotesi (3.19) sulla particolare forma dei filamenti di vortice, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(s, t) = \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \psi(s, t), 0 \right)$$

e per la (3.21) e (3.22)

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(s, t) = \Gamma \left(i\varepsilon\psi''(s, t), 0 \right) .$$

Dalle relazioni precedenti ne discende che la funzione complessa $\psi(s, t)$ soddisfa la seguente equazione di Schrödinger lineare

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(s, t) = i\Gamma\psi''(s, t)$$

con dato iniziale $\psi(s, 0)$.

L'equazione precedente è una delle equazioni fondamentali di questa tesi. Indica in che modo un filamento di vortice quasi parallelo interagisce con se stesso, cioè esprime la velocità in qualsiasi punto del filamento indotta dal filamento stesso.

Capitolo 4

INTERAZIONE DI N FILAMENTI VORTICOSI QUASI PARALLELI

Nel capitolo precedente abbiamo dedotto la velocità indotta da un filamento di vortice con il modello della L.I.A. e abbiamo applicato il risultato ottenuto al caso di un filamento quasi parallelo ad un asse. Se indichiamo con

$$\begin{aligned}\vec{X}(s, t) &= (\varepsilon\psi(s, t), s) \\ \psi(s) &\in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad s \in \mathbb{R} \quad \varepsilon \ll 1\end{aligned}$$

un filamento di vortice quasi parallelo all'asse z , di intensità Γ , allora l'evoluzione nel tempo del filamento è data dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\psi(s, t) = i\Gamma \frac{\partial^2}{\partial s^2}\psi(s, t) \\ \psi(s, 0) = \psi_0(s) \end{cases}.$$

In questo capitolo è illustrato un modello per l'interazione di N vortici

quasi paralleli all'asse z . I risultati e le soluzioni ottenute sono tratti dai lavori di Ponce [10], Kenig, Ponce, Vega [6], Newton [9].

Sia

$$\psi_j(s, t) \quad j = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

la posizione del j -esimo filamento di vortice alla quota s e al tempo t o, analogamente, la proiezione sul piano $z = 0$ della posizione del filamento alla quota s e al tempo t . Sia inoltre Γ_j l'intensità del j -esimo vortice. Il modello, introdotto da Klein, Majda, Damodoran in [7], si basa sulla seguente idea di decomposizione della velocità $\vec{v}_j = \vec{v}_{j1} + \vec{v}_{j2}$:

1) siccome ogni filamento è quasi parallelo ci serviamo del modello della L.I.A. applicato al caso di filamenti quasi paralleli per determinare la velocità autoindotta, cioè per ogni j poniamo

$$\vec{v}_{j1} = i\Gamma_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial s^2} ; \quad (4.2)$$

2) la mutua interazione tra i filamenti avviene come se i filamenti fossero perfettamente paralleli tra loro. Si suppone quindi che le distanze tra i filamenti siano tali da rendere trascurabili gli effetti dovuti al fatto che i filamenti siano quasi paralleli e non invece esattamente paralleli. Quindi, per ogni j , poniamo

$$\vec{v}_{j2} = i \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\psi_j - \psi_k}{|\psi_j - \psi_k|^2} \quad j = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

Sommando i termini (4.2) e (4.3) si ricava sistema di moto N filamenti vorticosi paralleli

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \psi_j(s, t) = i \cdot \left\{ \Gamma_j \frac{\partial^2}{\partial s^2} \psi_j(s, t) + \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)}{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2} \right\} \\ \psi_j(s, 0) = \psi_{j,0}(s) \end{cases} \quad (4.4)$$

Il sistema precedente è il sistema più importante di questo lavoro ed è il risultato di tutte le considerazioni precedenti, a partire dal modello della L.I.A. per l'autointerazione di un singolo filamento vorticoso, all'assunzione che i filamenti siano quasi paralleli e al modello che ne descrive l'interazione.

Cominciamo lo studio del moto di N filamenti vorticosi a partire da alcune quantità formalmente conservate dalle soluzioni del sistema (4.4).

4.1 HAMILTONIANA E QUANTITA' CONSERVATE

Dimostriamo in questo paragrafo che il sistema (4.4) può essere scritto in forma Hamiltoniana e che conserva, formalmente, alcune quantità come il momento angolare medio e il centro medio di vorticità.

Moltiplichiamo la prima equazione del sistema (4.4) per Γ_j e otteniamo

$$\Gamma_j \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = i \cdot \left\{ \Gamma_j^2 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial s^2} + \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{2\pi} \frac{\psi_j - \psi_k}{|\psi_j - \psi_k|^2} \right\} \quad j = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

Definizione 4.1 (Funzione Hamiltoniana) Definiamo il funzionale

$H = H(\psi_1, \dots, \psi_N)(t)$ nel seguente modo

$$H = \int \left(\sum_{j=1}^N \left(-\frac{\Gamma_j^2}{2} \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial s} \right|^2 + \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{4\pi} \log |\psi_j - \psi_k| \right) \right) ds. \quad (4.6)$$

Teorema 4.1 Il funzionale H è l'Hamiltoniana del sistema (4.4), cioè

$$\Gamma_j \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = i \frac{\delta H}{\delta \psi_j} \quad j = 1, \dots, N$$

Dimostrazione. Calcoliamo $i \frac{\delta H}{\delta \psi_j}$ e mostriamo che è uguale al termine di destra della (4.5).

$$\frac{\delta H}{\delta \psi_j} = \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_j^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial s} + \Gamma_j \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{(\psi_j - \psi_k)}{|\psi_j - \psi_k|^2}$$

$$= \Gamma_j^2 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial s^2} + \Gamma_j \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k (\psi_j - \psi_k)}{2\pi |\psi_j - \psi_k|^2}$$

Quindi

$$i \frac{\delta H}{\delta \psi_j} = i \left(\Gamma_j^2 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial s^2} + \Gamma_j \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k (\psi_j - \psi_k)}{2\pi |\psi_j - \psi_k|^2} \right) .$$

□

La funzione $H(\psi_1, \dots, \psi_n)(t)$ si conserva nel tempo sulle soluzioni del sistema (4.4), cioè se $\psi_1(s, t), \dots, \psi_N(s, t)$ sono soluzioni allora

$$\frac{dH}{dt} = 0 .$$

Dimostriamo ora la conservazione di altre quantità.

Definizione 4.2 (Momento angolare medio) *Si definisce momento angolare medio la quantità*

$$A(t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \int |\psi_j(s, t)|^2 ds .$$

Definizione 4.3 (Centro medio di vorticità) *Si definisce centro di vorticità la funzione*

$$B(s, t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \psi_j(s, t)$$

e centro medio di vorticità

$$M(t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \int \psi_j(s, t) ds .$$

Teorema 4.2 Sia $\psi_j(s, t)$ soluzione del sistema (4.4) tale che, per ogni t fissato, si abbia $\psi(s, t)$ periodica in s oppure $\frac{\partial}{\partial s}\psi_j \rightarrow 0$ per $s \rightarrow \infty$. Allora le quantità $A(t)$ e $M(t)$ sono conservate lungo le soluzioni $\psi_j(s, t)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\psi_j(s, t)$ siano soluzioni del sistema (4.4) e calcoliamo la derivata di A rispetto al tempo.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{j=1}^N \Gamma_j \int \frac{\partial}{\partial t} |\psi_j(s, t)|^2 ds \\ &= \sum_{j=1}^N \Gamma_j \int 2\psi_j(s, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi_j(s, t) ds \\ &= \sum_{j=1}^N \Gamma_j \int 2\psi_j(s, t) \cdot \left(i\Gamma_j \frac{\partial^2}{\partial s^2} \psi_j(s, t) + i \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)}{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2} \right) ds \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{j=1}^N \Gamma_j \int 2\psi_j(s, t) \cdot \left(i\Gamma_j \frac{\partial^2}{\partial s^2} \psi_j(s, t) \right) ds \\ &+ \sum_{j=1}^N 2\Gamma_j \int \psi_j(s, t) \cdot \left(i \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)}{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2} \right) ds . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Integriamo per parti il primo integrale della relazione (4.7) e otteniamo

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \int 2\Gamma_j^2 \psi_j(s, t) \cdot \left(i \frac{\partial^2}{\partial s^2} \psi_j(s, t) \right) ds \\ &= \sum_{j=1}^N \int 2\Gamma_j^2 \frac{\partial}{\partial s} \psi_j(s, t) \cdot \left(i \frac{\partial}{\partial s} \psi_j(s, t) \right) ds \\ &= 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

mentre il secondo termine della parte di destra della relazione (4.7) è uguale

a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{\pi} \int \psi_j(s, t) \cdot \left(i \frac{\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)}{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2} \right) ds \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{k > j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{\pi} \int \frac{(\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)) \cdot \left(i (\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)) \right)}{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2} ds \\
&= 0 \quad \forall t .
\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\frac{dA}{dt} = 0 .$$

Dimostriamo ora la conservazione della quantità M .

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= \sum_{j=1}^N \int \Gamma_j \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \\
&= \sum_{j=1}^N \int i \Gamma_j \frac{\partial^2 \psi_j(s, t)}{\partial s^2} ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \int i \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{2\pi} \frac{\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)}{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2} ds . \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Per l'ipotesi di decadenza a zero all'infinito delle funzioni $\frac{\partial}{\partial s} \psi_j(s, t)$ il primo integrale della (4.8) è uguale a zero. Il secondo integrale della (4.8) è uguale

a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \sum_{k > j} \int i \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{2\pi} \frac{(\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)) + (\psi_k(s, t) - \psi_j(s, t))}{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2} ds \\
&= 0 \quad \forall t
\end{aligned}$$

quindi

$$\frac{dM}{dt} = 0 .$$

□

Osservazione. Notiamo che se $\Gamma_j = \Gamma$ allora la quantità $B(s, t)$ è soluzione della seguente equazione di Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t} B(s, t) = i\Gamma \frac{\partial^2}{\partial s^2} B(s, t) .$$

Essendo l'operatore di Schrödinger unitario, non cambia nel tempo la quantità $\|B(\cdot, t)\|_{L^2}$.

Definizione 4.4 *Definiamo il funzionale*

$$I = \sum_{j=1}^N \sum_{k>j} \Gamma_j \Gamma_k \int |\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2 ds$$

media delle distanze tra i filamenti di vortice.

Teorema 4.3 *Se $\Gamma_j = \Gamma \forall j$ allora il funzionale I calcolato sulle soluzioni del sistema (4.4), periodiche o tali che $\frac{\partial}{\partial s} \psi_j \rightarrow 0$ per $s \rightarrow \infty$, si conserva nel tempo.*

Dimostrazione.

Scriviamo il funzionale I nella seguente forma.

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \Gamma_j \Gamma_k \int (|\psi_j|^2 + |\psi_k|^2 - 2\psi_j \cdot \psi_k) ds \quad (4.9)$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^N \Gamma_k \sum_{j=1}^N \int \Gamma_j |\psi_j|^2 ds + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \int \Gamma_k |\psi_k|^2 ds - \int (2 \sum_{j=1}^N \Gamma_j \psi_j \sum_{k=1}^N \Gamma_k \psi_k) ds \\ I &= \sum_{k=1}^N \Gamma_k A(t) + \sum_{j=1}^N \Gamma_j A(t) - \int 2|B(s, t)|^2 ds \end{aligned}$$

Allora se $\Gamma_j = \Gamma$, per la conservazione della quantità $A(t)$ e della quantità $\|B(\cdot, t)\|_{L^2}$, ne deriva la conservazione nel tempo della quantità I .

□

4.2 SOLUZIONI DI TIPO ELICOIDALE: CONFIGURAZIONI COSTANTI

In questa sezione forniremo soluzioni esplicite del sistema di moto di N filamenti vorticosi quasi paralleli

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = i \cdot \left\{ \Gamma_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial s^2} + \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\psi_j - \psi_k}{|\psi_j - \psi_k|^2} \right\} \\ \psi_j(s, 0) = \psi_{j,0}(s) \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4.10)$$

Definizione 4.5 (Configurazioni costanti) *Si definisce moto di equilibrio relativo, corrispondente alla configurazione centrale o costante ξ_j , una soluzione del sistema (4.10) del tipo*

$$\psi_j(s, t) = e^{i\omega s} e^{i\nu t} \xi_j \quad j = 1, \dots, N \quad (4.11)$$

Si noti che, fissate le frequenze ω e ν , le funzioni ψ_j definite in (4.11) dipendono esclusivamente dalla scelta dei punti ξ_j . Inoltre tutti i filamenti hanno la medesima forma, di tipo elicoidale, mentre l'evoluzione temporale corrisponde ad una rotazione, uguale per ogni filamento, attorno all'asse z della configurazione iniziale. Quindi, a meno di rotazione, la soluzione $\psi_j(s, t)$ è costante nel tempo e periodica in s . Nel caso particolare in cui $\omega = 0$ la soluzione ψ_j corrisponde a filamenti di vortice perfettamente paralleli.

Cerchiamo le condizioni che devono soddisfare le configurazioni ξ_j per cui si abbia una soluzione di moto relativo del tipo appena definito..

Siano $\Gamma_j, \omega, \nu \in \mathbb{R}$ fissati. Sostituiamo le funzioni (4.11) nel sistema (4.10) e otteniamo

$$\nu e^{i\omega s} e^{i\nu t} \xi_j = e^{i\omega s} e^{i\nu t} \left(-\Gamma_j \omega^2 \xi_j + \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\xi_j - \xi_k}{|\xi_j - \xi_k|^2} \right) \quad j = 1, \dots, N$$

Dunque abbiamo soluzioni del sistema (4.10) se i punti ξ_j soddisfano la seguente relazione

$$\left(\Gamma_j \nu + \Gamma_j^2 \omega^2\right) \xi_j - \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{2\pi} \frac{\xi_j - \xi_k}{|\xi_j - \xi_k|^2} = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.12)$$

Definiamo la funzione

$$U : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U(\xi) = \sum_{j=1}^N \left(\Gamma_j \nu + \Gamma_j^2 \omega^2\right) \frac{|\xi_j|^2}{2} - \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{4\pi} \log |\xi_j - \xi_k| \quad (4.13)$$

con $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$. Il sistema (4.12) può essere scritta nella seguente forma potenziale

$$\nabla U = 0 .$$

I punti $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ che risolvono il sistema (4.12) sono quindi estremanti della funzione U .

Cerchiamo ora soluzioni di equilibrio relativo, corrispondenti a configurazioni centrali, a partire da proprietà di invarianza del sistema (4.10) e dalla sua struttura Hamiltoniana. Il ragionamento si basa su una peculiare proprietà del sistema (4.10).

Teorema 4.4 (Invarianza galileiana) *Se i filamenti di vortice hanno la stessa circolazione, $\Gamma_j = \Gamma$ $j = 1, \dots, N$, e $\psi_j(s, t)$ è soluzione del sistema (4.10), allora $\forall \omega \in \mathbb{R}$*

$$\tilde{\psi}_{j,\omega}(s, t) = e^{-i\Gamma\omega^2 t} e^{i\omega s} \psi(s - 2\Gamma\omega t, t) \quad j = 1, \dots, N$$

è ancora una soluzione di (4.10) con dato iniziale

$$\tilde{\psi}_{j,\omega}(s, 0) = e^{i\omega s} \psi(s, 0) \quad j = 1, \dots, N$$

Ricordiamo che soluzioni $Z_j(t)$ del sistema (2.15) sono soluzioni anche del sistema (4.10), nel senso che le funzioni $\psi_j(s, t)$ tali che $\psi_j(s, t) = Z_j(t)$ per ogni s risolvono il sistema (4.10). Assumiamo $\Gamma_j = \Gamma$ per $j = 1, \dots, N$ e consideriamo una soluzione del sistema (2.15) a partire da una configurazione iniziale in cui ogni vortice è posizionato in un vertice di un N -poligono regolare di raggio R . Allora dalla (2.30) e (2.29) si ottiene la soluzione

$$Z_j(t) = Re^{2\pi i(j-1)/N} e^{i\nu t} \quad j = 1, \dots, N$$

con $\nu = \frac{\Gamma(N-1)}{4\pi R^2}$. Ne segue che le funzioni

$$\psi_j(s, t) = Re^{2\pi i(j-1)/N} e^{i\nu t} \quad j = 1, \dots, N$$

sono soluzioni del sistema (4.10) e corrispondono a N vortici esattamente paralleli tra loro, ognuno dei quali ruota con velocità angolare ν . Per il teorema (4.4) si ha che per ogni $\omega \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\psi}_{j,\omega}(s, t) = Re^{i\omega s} e^{2\pi i(j-1)/N} e^{i(\nu - \Gamma\omega^2)t} \quad j = 1, \dots, N$$

è soluzione del sistema (4.10), con dato iniziale

$$\tilde{\psi}_{j,\omega}(s, 0) = Re^{i\omega s} e^{2\pi i(j-1)/N}.$$

Riassumiamo i risultati ottenuti nel prossimo teorema.

Teorema 4.5 *Siano ξ_j per $j = 1, \dots, N$ vertici di un N -poligono regolare di raggio R . Se, fissato $\omega \in \mathbb{R}$,*

$$\psi_j(s, 0) = e^{i\omega s} \xi_j \quad j = 1, \dots, N \tag{4.14}$$

è la configurazione iniziale di N filamenti di vortice della stessa intensità Γ , allora la soluzione del sistema (4.10) è

$$\psi_j(s, t) = e^{i\omega s} e^{i\nu t} \xi_j \quad j = 1, \dots, N \tag{4.15}$$

con

$$\nu = \frac{\Gamma(N-1)}{4\pi R^2} - \Gamma\omega^2 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.16)$$

Osservazione. Il teorema precedente esprime la forma che devono avere N filamenti di vortice di tipo elicoidali nello spazio e nel tempo, a partire da una configurazione costante, di tipo elicoidale nello spazio. Cioè dati R e ω si ricava $\nu = \nu(R, \omega)$. Nel prossimo teorema invece si fissano le frequenze ω e ν e si ricava $R = R(\omega, \nu)$ tale da avere soluzioni del tipo (4.11).

Teorema 4.6 *Siano Γ, ω e $\nu \in \mathbb{R}$ fissati. Allora*

$$\psi_j(s, t) = e^{i\omega s} e^{i\nu t} \xi_j \quad j = 1, \dots, N$$

è soluzione del sistema (4.10) con dato iniziale

$$\psi_j(s, 0) = e^{i\omega s} \xi_j \quad j = 1, \dots, N$$

dove ξ_j sono vertici di un N -poligono regolare di raggio R e R soddisfa la relazione

$$R = \left(\frac{\Gamma(N-1)}{4\pi(\nu + \Gamma\omega^2)} \right)^{1/2}. \quad (4.17)$$

Siano ora Γ_j non necessariamente uguali. Si osservi che la funzione U definita in (4.13) è continua su $\mathbb{R}^2$ tranne nei punti $\tilde{\xi}_{jk}$ in cui $\xi_j = \xi_k$ per qualche $j \neq k$, per i quali U tende all'infinito.

Se restringiamo il dominio di U all'insieme

$$D_M = \{\xi : |\xi_j| < M, \xi \notin B_\varepsilon(\tilde{\xi}_{jk})\}$$

per un certo M fissato, allora U è uniformemente continua su D_M . Inoltre U è limitata inferiormente quindi, a meno di aumentare il valore di M , esiste sicuramente un minimo per U in D_M .

Ovviamente i punti ξ che realizzano il minimo di U sono soluzione del sistema (4.12) ma non ne esauriscono tutte le possibili soluzioni. Infatti la funzione U potrebbe avere anche dei punti di massimo locale o punti di sella per i quali $\nabla U = 0$ e quindi soluzioni dell'equazione (4.12). Si noti inoltre che, a differenza delle soluzioni trovate esplicitamente nella prima parte di questa sezione, risolvendo l'equazione (4.12) ricaviamo soluzioni del problema di moto di N filamenti quasi paralleli aventi intensità non necessariamente uguali.

Le soluzioni rappresentate in seguito sono state ottenute risolvendo numericamente l'equazione (4.12), per la quale è stato implementato il metodo delle tangenti di Newton.

Nelle figure (4.1) e (4.2) si considerano filamenti di vortice della stessa intensità. Nel primo caso è raffigurato l'istante iniziale di un sistema di quattro filamenti di vortice di intensità pari a 0.5 e frequenze $\nu = 1/\pi$ e $\omega = 1$; nella seconda figura si è considerato un sistema con tre filamenti di intensità $\Gamma = 2$ e frequenze $\nu = 1$, $\omega = 0.5$. Nelle figure (4.3) e (4.5) sono rappresentati filamenti di vortice che siano soluzioni costanti con intensità diverse. In particolare in (4.3) si considerano tre filamenti, blu, rosso, verde di intensità rispettivamente 1, -0.5 , 2 e frequenze $\omega = 1/\pi$ e $\nu = 0.5$. In (4.5) si hanno cinque filamenti di intensità $[1, 0.5, 0.2, 1, 0.5]$, frequenze $\nu = 2$, $\omega = 1$, colorati rispettivamente in blu, rosso, verde, nero, magenta. Le altre figure, (4.4) e (4.6) rappresentano una vista dall'alto delle soluzioni precedenti.

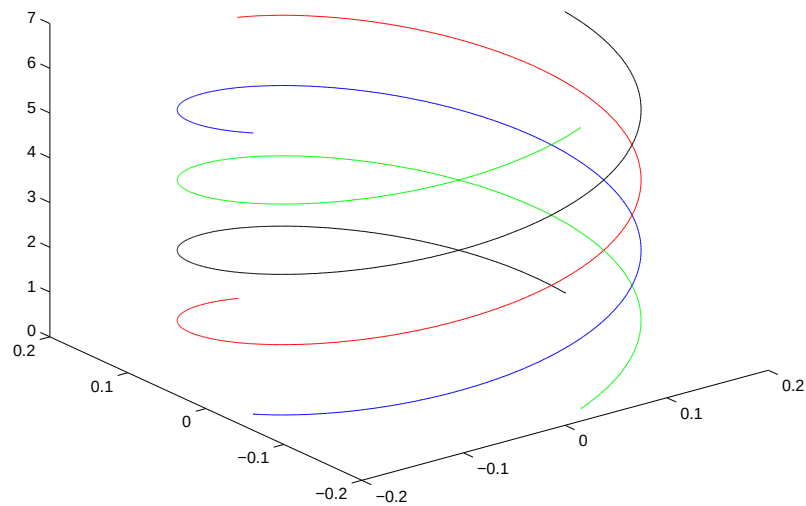


Figura 4.1:

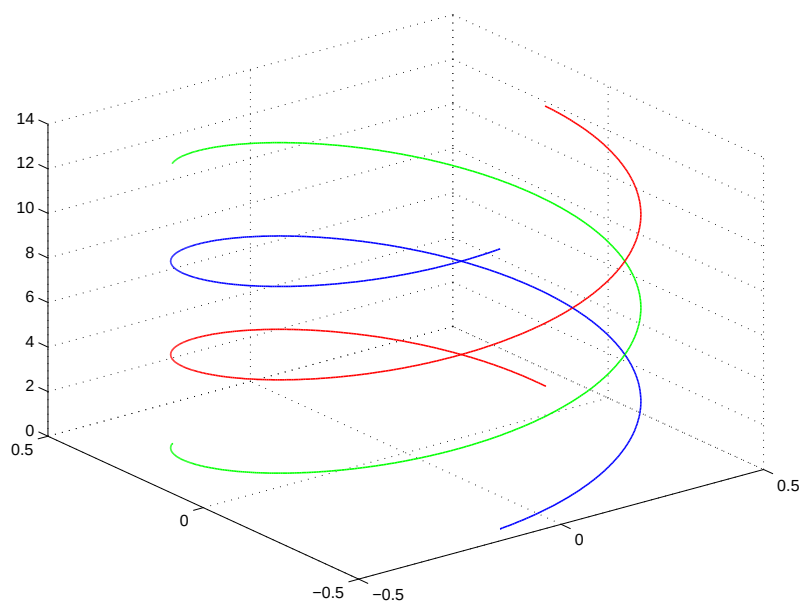


Figura 4.2:

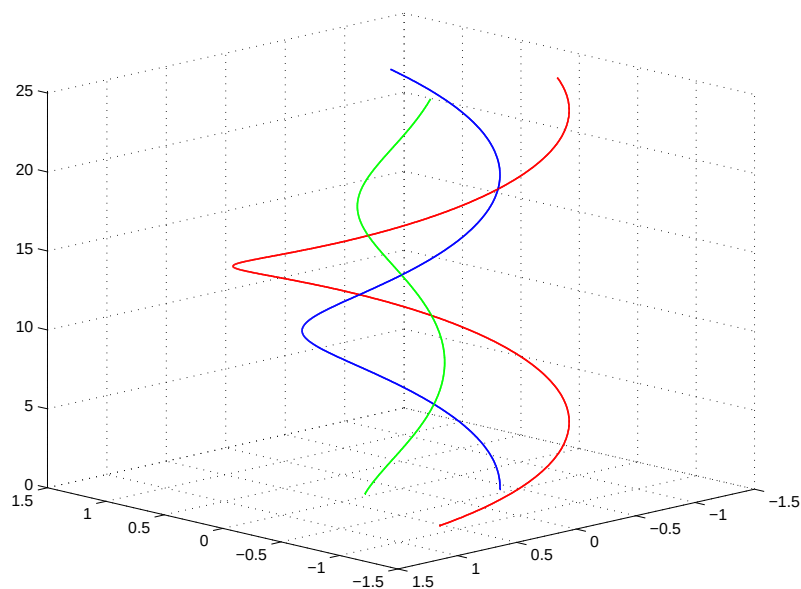


Figura 4.3:

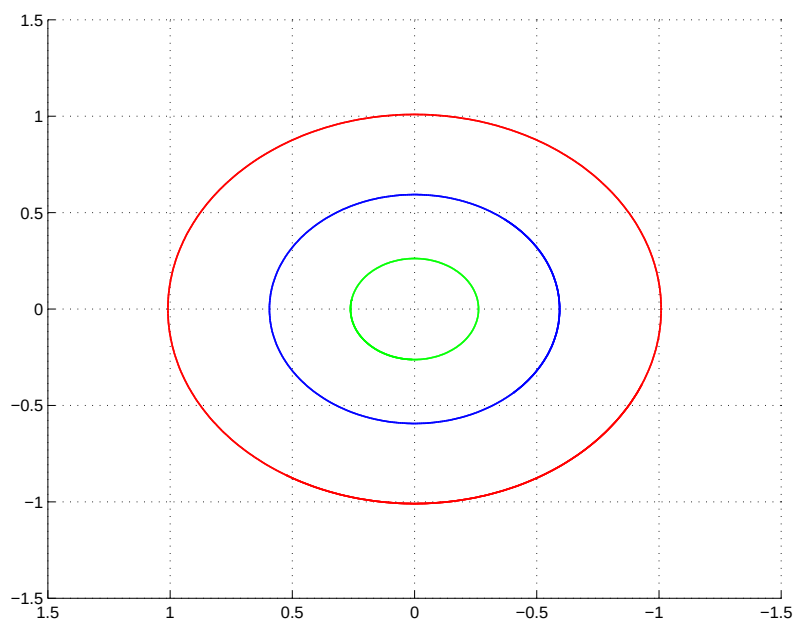


Figura 4.4:

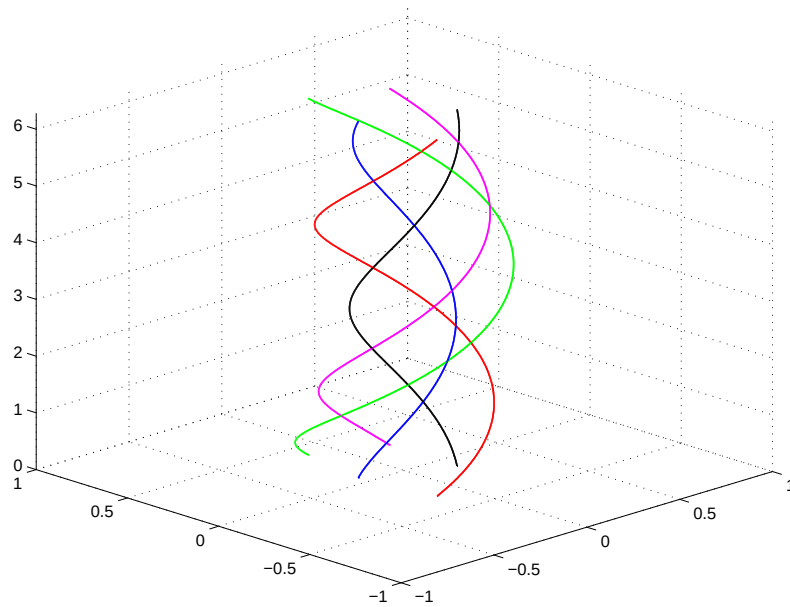


Figura 4.5:

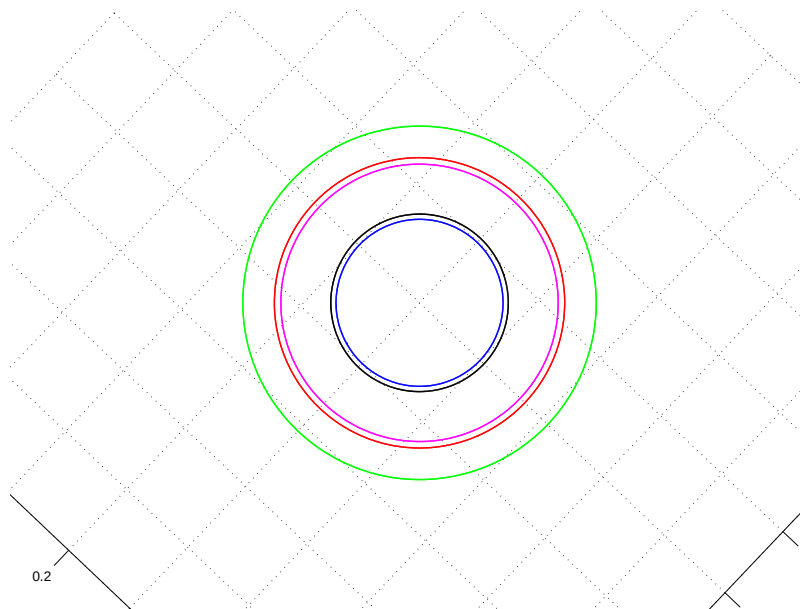


Figura 4.6:

4.3 SOLUZIONI DI TIPO ELICOIDALE E OMOGRAFICHE

Definizione 4.6 *Definiamo di tipo elicoidale una soluzione del sistema (4.10) del tipo*

$$\psi_j(s, t) = e^{i\nu t} \tilde{\psi}_j(s) . \quad (4.18)$$

Il termine *elicoidale* è riferito all'andamento nel tempo della soluzione; infatti data la configurazione al tempo $t = 0$, l'evoluto di ciascun filamento al tempo t si ottiene come rotazione attorno all'asse z della configurazione iniziale.

Sia quindi $\psi_j(s, t)$ della forma (4.18). Allora

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_j(s, t) = i\nu e^{i\nu t} \tilde{\psi}_j(s) \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \psi_j(s, t) = e^{i\nu t} \frac{d^2}{ds^2} \tilde{\psi}_j(s) . \quad (4.20)$$

Sostituiamo le relazioni precedenti nel sistema (4.4) e otteniamo

$$\nu e^{i\nu t} \tilde{\psi}_j(s) = i \left(\Gamma_j e^{i\nu t} \frac{d^2}{ds^2} \tilde{\psi}_j(s) + e^{i\nu t} \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\tilde{\psi}_j(s) - \tilde{\psi}_k(s)}{|\tilde{\psi}_j(s) - \tilde{\psi}_k(s)|^2} \right) \quad (4.21)$$

quindi le funzioni $\psi_j(s)$ soddisfano il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \Gamma_j \frac{d^2}{ds^2} \tilde{\psi}_j(s) - \nu \tilde{\psi}_j(s) + \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\tilde{\psi}_j(s) - \tilde{\psi}_k(s)}{|\tilde{\psi}_j(s) - \tilde{\psi}_k(s)|^2} = 0 \\ \tilde{\psi}_j(0) = \tilde{\psi}_{j,0} \end{cases} \quad (4.22)$$

Per ogni $j = 1, \dots, N$ la prima riga del sistema precedente si riscrive nella forma

$$\Gamma_j^2 \frac{d^2}{ds^2} \tilde{\psi}_j(s) = \Gamma_j \nu \tilde{\psi}_j(s) - \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{2\pi} \frac{\tilde{\psi}_j(s) - \tilde{\psi}_k(s)}{|\tilde{\psi}_j(s) - \tilde{\psi}_k(s)|^2} . \quad (4.23)$$

Se indichiamo con $U = U(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_N)$ la funzione

$$U = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\Gamma_j}{2} \nu |\tilde{\psi}_j|^2 - \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{4\pi} \log |\tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_k| \right) \quad (4.24)$$

allora possiamo riscrivere il sistema (4.22) in forma lagrangiana

$$\Gamma^2 \frac{d^2}{ds^2} \tilde{\psi} = \nabla U . \quad (4.25)$$

La funzione di Lagrange associata all'equazione precedente è

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\Gamma_j^2}{2} \left| \frac{d}{ds} \tilde{\psi}_j \right|^2 + \frac{\Gamma_j}{2} \nu |\tilde{\psi}_j|^2 - \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{4\pi} \log |\tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_k| \right) . \quad (4.26)$$

Quindi le soluzioni del sistema (4.22) si ottengono minimizzando il funzionale azione su tutte le possibili configurazioni $\{\tilde{\psi}_j\}_{j=1}^N$.

$$\min_{\tilde{\psi}} \int \mathcal{L}(\tilde{\psi}) ds . \quad (4.27)$$

Definizione 4.7 (Soluzioni omografiche di tipo elicoidale)

Definiamo moto di tipo elicoidale omografico una soluzione $\psi_j(s, t)$ del sistema (4.4) della forma

$$\psi_j(s, t) = e^{i\nu t} \lambda(s) \xi_j \quad (4.28)$$

con $\lambda(s) \in \mathbb{C}$.

Soluzioni di questo tipo sono tali che la forma descritta ad ogni quota s si ottiene dalle forma alla quota $s = 0$ tramite rotazione e dilatazione. Inoltre l'evoluto temporale di ogni filamento si ottiene tramite una rotazione attorno all'asse z della posizione iniziale.

Cominciamo col seguente teorema.

Teorema 4.7 Sia $\Gamma_j = \Gamma$ per ogni j e ξ_j una configurazione centrale. Se

$$\psi_j(s, t) = e^{i\phi(s, t)} \xi_j$$

è soluzione del sistema (4.10) allora

$$\phi(s, t) = ks + ht.$$

Dimostrazione. Sostituendo la soluzione $\psi_j(s, t)$ nel sistema si ottiene

$$\xi_j \frac{\partial \phi(s, t)}{\partial t} = -\xi_j \left(\frac{\partial \phi(s, t)}{\partial s} \right)^2 + i \xi_j \left(\frac{\partial^2 \phi(s, t)}{\partial s^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \xi_j .$$

La funzione $\phi(s, t)$ soddisfa quindi il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi(s, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi(s, t) = - \left(\frac{\partial}{\partial s} \phi(s, t) \right)^2 + c \end{cases} \quad (4.29)$$

Dalla prima equazione del sistema precedente discende che

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi(s, t) = \alpha(t)$$

quindi

$$\phi(s, t) = s\alpha(t) + \beta(t)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(s, t) = s\alpha'(t) + \beta'(t) .$$

Dalla seconda equazione del sistema (4.29) si ottiene

$$s\alpha'(t) + \beta'(t) = -\alpha^2(t) + c$$

da cui

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= k \\ \beta(t) &= ht \end{aligned}$$

con $h = -k^2 + c$.

□

Sia $N = 3$ e $\Gamma_j = \Gamma$ per ogni j e cerchiamo soluzioni omografiche di tipo elicoidale della forma

$$\psi_j(s, t) = e^{i\nu t} \lambda(s) e^{\frac{2\pi i}{3}(j-1)} \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.30)$$

Notiamo che ad ogni quota s la distanza tra i filamenti è la stessa e dipende esclusivamente da s , in particolare non dipende dal tempo.

Ponendo

$$\tilde{\psi}_j(s) = \lambda(s) e^{\frac{2\pi i}{3}(j-1)} \quad j = 1, 2, 3$$

per la (4.23) si ha che $\psi_j(s, t)$ definita in (4.28) è soluzione del sistema (4.4) se la funzione $\lambda(s)$ soddisfa la seguente relazione:

$$\Gamma \lambda''(s) = \nu \lambda(s) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\lambda(s)}{|\lambda(s)|^2} \quad (4.31)$$

dove $\lambda' = \frac{d}{ds} \lambda$. Sia

$$\lambda(s) = R(s) e^{i\theta(s)} \quad (4.32)$$

con $R, \theta \in C^2(\mathbb{R})$. Allora

$$\lambda''(s) = e^{i\theta(s)} \left(R''(s) + 2i\theta'(s)R'(s) + i\theta''(s)R(s) - (\theta'(s))^2 R(s) \right) \quad (4.33)$$

e la (4.31), in termini di R e θ , diventa

$$e^{i\theta(s)} \left(\begin{aligned} & -\nu R(s) + \Gamma R''(s) - \Gamma(\theta'(s))^2 R(s) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{R(s)}{R^2(s)} \\ & + i \left(2\theta'(s)R'(s) + \theta''(s)R(s) \right) \end{aligned} \right) = 0. \quad (4.34)$$

Dividendo l'equazione precedente in parte reale e immaginaria otteniamo la coppia di equazioni

$$\begin{aligned} -\nu R(s) + \Gamma R''(s) - \Gamma(\theta'(s))^2 R(s) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{R(s)}{R^2(s)} &= 0 \\ 2\theta'(s)R'(s) + \theta''(s)R(s) &= 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Si noti che la seconda equazione moltiplicata per $R(s)$ equivale a

$$\frac{d}{ds} \left(R^2(s) \theta'(s) \right) = 0 \quad (4.36)$$

ovvero

$$R^2(s) \theta'(s) = K . \quad (4.37)$$

L'equazione precedente esprime esplicitamente la conservazione del momento angolare per le soluzioni del sistema (4.4). Sostituendo nella (4.35) la relazione $\theta'(s) = K/R^2(s)$ si ottiene

$$-\nu R(s) + \Gamma R''(s) - \Gamma \frac{K^2}{R^3(s)} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{R(s)} = 0$$

e, integrando,

$$-\frac{\nu}{2} R^2(s) + \frac{\Gamma}{2} (R'(s))^2 + \frac{\Gamma}{2} \frac{K^2}{R^2(s)} + \frac{\Gamma}{2\pi} \log(R(s)) = E . \quad (4.38)$$

Si può leggere la relazione precedente come una conservazione dell'energia.

Quindi scelti K e E si ottiene la soluzione $\lambda(s) = R(s)e^{i\theta(s)}$.

Supponiamo il caso in cui $K = 0$, cioè $\theta(s)$ costante

$$\theta(s) = \theta_0 .$$

L'equazione (4.38) si riscrive nella forma

$$E = \frac{\Gamma}{2} (R'(s))^2 - \frac{\nu}{2} R^2(s) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log(R(s))$$

o, analogamente dividendo per Γ ,

$$E' = \frac{1}{2} (R'(s))^2 + V(R)$$

dove

$$V(R) = -\frac{\nu}{2\Gamma} R^2(s) + \frac{1}{2\pi} \log(R(s)) .$$

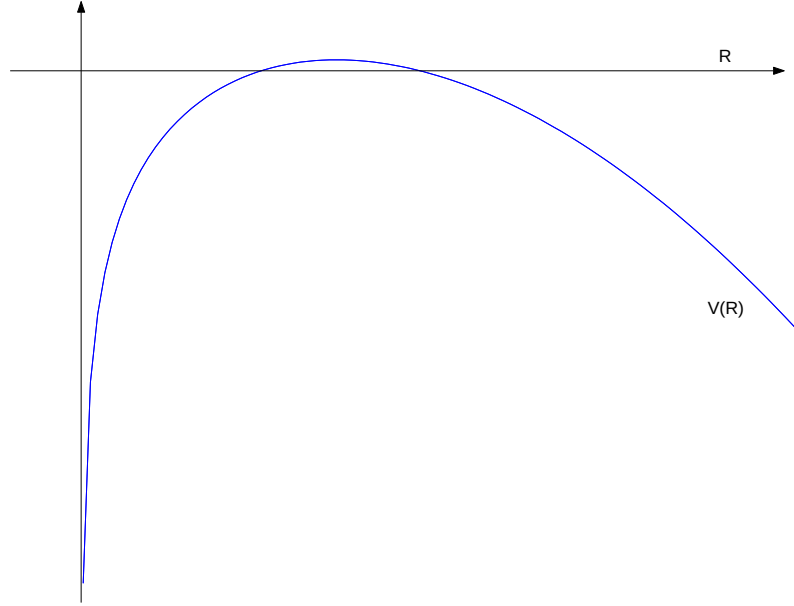


Figura 4.7: Funzione potenziale con $K = 0$, $\nu\Gamma > 0$

Poniamo $\nu\Gamma > 0$ allora il potenziale $V(R)$ è raffigurato in figura (4.7). L'unico punto estremante per $V(R)$ si ottiene risolvendo l'equazione

$$\frac{dV}{dR} = -\nu R + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{R} = 0$$

la cui soluzione è

$$\bar{R} = \left(\frac{\Gamma}{2\pi\nu} \right)^{1/2}. \quad (4.39)$$

Quindi se $R(0) = \bar{R}$ allora $R(s) = \bar{R}$ per ogni s . Dunque la funzione costante

$$\lambda(s) = \bar{R} e^{i\theta_0} \quad (4.40)$$

è una soluzione dell'equazione (4.31) per ogni θ_0 e

$$\psi_j(s, t) = e^{i\nu t} \bar{R} e^{i\theta_0} e^{\frac{2\pi i}{3}(j-1)} \quad j = 1, \dots, N \quad (4.41)$$

è soluzione del sistema di moto (4.4) corrispondente a tre filamenti di vortice completamente paralleli.

D'altra parte se $\nu\Gamma < 0$ allora il potenziale $V(R)$, rappresentato in figura (4.8), non ammette punti estremanti.

Si noti che il risultato ottenuto è in accordo con quanto dimostrato nella sezione precedente. Infatti ponendo $\omega = 0$ e $N = 3$ nella (4.16) si ha che Γ e ν devono essere concordi e la relazione tra i dati del problema è la stessa espressa nella (4.39).

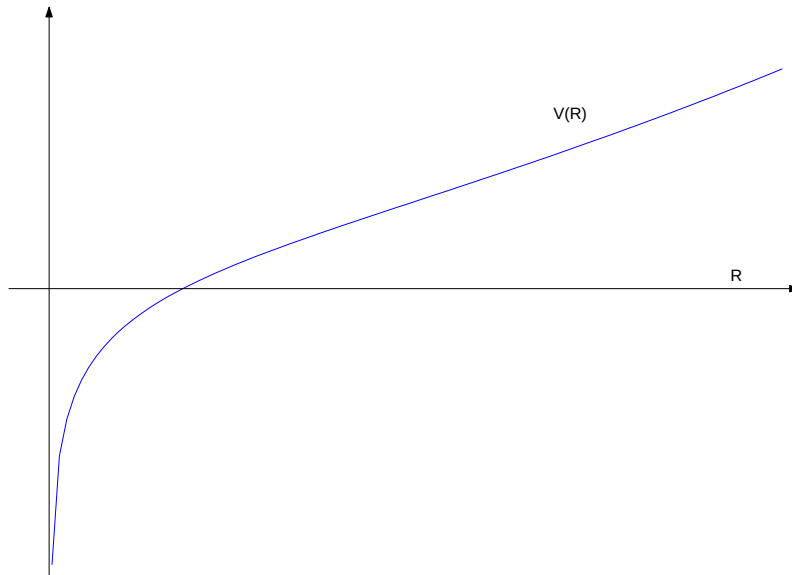


Figura 4.8: Funzione potenziale con $K = 0$, $\nu\Gamma < 0$

Supponiamo

$$K \neq 0 .$$

Quindi $\theta'(s) = \frac{K}{R^2(s)}$ e

$$\frac{1}{2}\Gamma(R'(s))^2 - \frac{\nu}{2}R^2(s) + \frac{1}{2}\Gamma\frac{K^2}{R^2(s)} + \frac{\Gamma}{2\pi}\log(R(s)) = E . \quad (4.42)$$

Dividiamo per Γ e riscriviamo la relazione precedente nella forma

$$\frac{1}{2}(R'(s))^2 + V(R) = E'$$

con

$$V(R) = -\frac{\nu}{2\Gamma}R^2(s) + \frac{1}{2}\frac{K^2}{R^2(s)} + \frac{1}{2\pi}\log(R(s)) = E'.$$

Dividiamo lo studio della relazione precedente in due casi: $\Gamma\nu > 0$ e $\Gamma\nu < 0$.

Consideriamo inizialmente $\Gamma\nu > 0$. Il potenziale $V(R)$ è raffigurato in figura (4.9) e i punti estremanti si ottengono risolvendo l'equazione

$$\frac{dV}{dR} = -\frac{\nu}{\Gamma}R - \frac{K^2}{R^3} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R} = 0. \quad (4.43)$$

Allora se

$$K^2 \leq \frac{\Gamma}{16\pi^2\nu}$$

si ottengono le soluzioni

$$R_1^2 = \frac{\Gamma}{4\pi\nu} + \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2\nu\Gamma K^2}}{4\pi\nu} \quad \text{e} \quad R_2^2 = \frac{\Gamma}{4\pi\nu} - \frac{\sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2\nu\Gamma K^2}}{4\pi\nu}. \quad (4.44)$$

Si noti che R_1^2 e R_2^2 sono entrambi positivi, quindi otteniamo due soluzioni maggiori di zero per l'equazione (4.43):

$$R_1 = \left(\frac{\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2\nu\Gamma K^2}}{4\pi\nu} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad R_2 = \left(\frac{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2\nu\Gamma K^2}}{4\pi\nu} \right)^{1/2}.$$

Se poniamo $R(0)$ uguale ad R_1 o R_2 allora la funzione $R(s)$ rimane costante e $\theta(s)$ lineare in s . Queste soluzioni sono equivalenti alle soluzioni di tipo elicoidale a configurazione costante trovate nella sezione precedente, con la frequenza $\omega \neq 0$.

Si osservi che $R(s) = R_1$ è una soluzione stabile dell'equazione (4.42) nel senso che il diagramma delle fasi (R, R') nelle vicinanze del punto $(R_1, 0)$ è

composto da orbite chiuse. Quindi se $R(0) = \alpha$, con α abbastanza vicino a R_1 , la funzione $R(s)$ soluzione dell'equazione (4.42) con dato iniziale $R(0)$, è periodica in s e limitata. Si ottengono quindi soluzioni $\psi_j(s, t)$ $j = 1, 2, 3$, del sistema (4.4), con $\|\psi_j(\cdot, t)\|_\infty < \infty$ che siano di tipo elicoidale, strettamente omografiche, nel senso che non corrispondono a configurazioni centrali costanti.

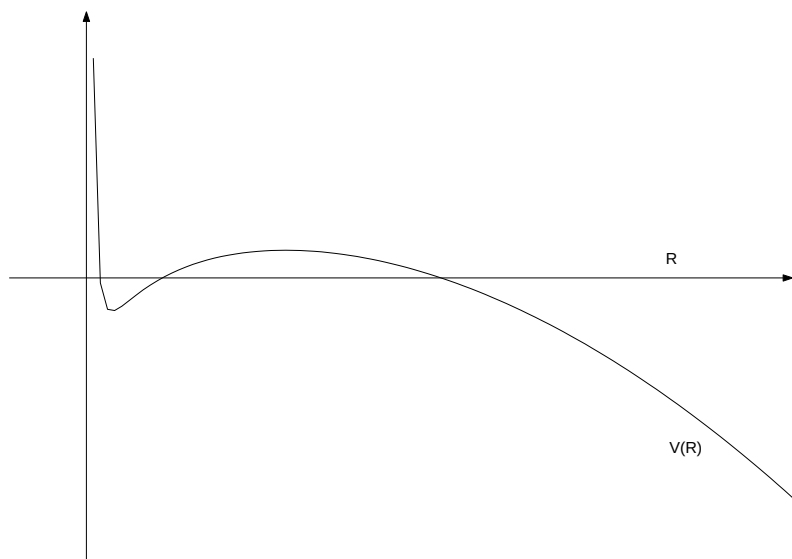


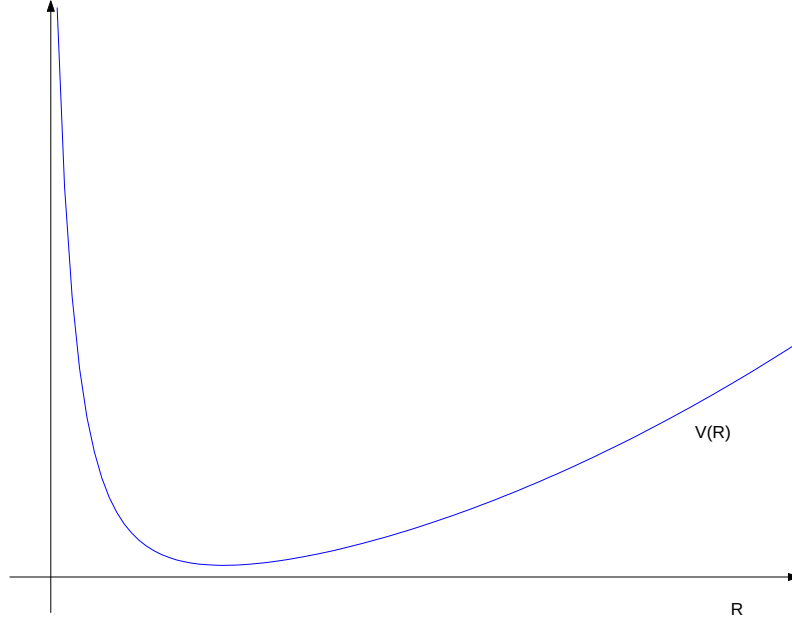
Figura 4.9: Funzione potenziale con $K \neq 0$, $\nu\Gamma > 0$

Sia ora $\Gamma\nu < 0$.

In figura (4.10) è raffigurato l'andamento del potenziale. Le soluzioni R_1^2 e R_2^2 (4.44) dell'equazione

$$\frac{dV}{dR} = 0 \quad (4.45)$$

esistono per ogni K , ma solo una delle due è positiva. In particolare al variare della positività di ν e Γ si ha che l'unica soluzione reale positiva dell'equazione

Figura 4.10: Funzione potenziale con $K \neq 0$, $\nu\Gamma < 0$

(4.45) è

$$R = \left(\frac{\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2\nu\Gamma K^2}}{4\pi\nu} \right)^{1/2} \quad \text{se } \Gamma > 0 \text{ e } \nu < 0$$

$$R = \left(\frac{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2\nu\Gamma K^2}}{4\pi\nu} \right)^{1/2} \quad \text{se } \Gamma < 0 \text{ e } \nu > 0 .$$

Le due soluzioni $R(s)$ trovate sono stabili nel senso specificato precedentemente; otteniamo quindi altre soluzioni di tipo elicoidale, omografiche del sistema (4.4), con $N = 3$ e intensità $\Gamma_j = \Gamma$.

Capitolo 5

STABILITA' DELLE SOLUZIONI DI MOTO DI N FILAMENTI VORTICOSI QUASI PARALLELI

In questo capitolo si tratterà della stabilità delle soluzioni di moto di N filamenti vorticosi quasi paralleli. Riportiamo un teorema dovuto a Kenig, Ponce, Vega [6] sulla stabilità della soluzione del sistema di moto per N filamenti di vortice quasi paralleli, corrispondente a tre filamenti di vortice paralleli della stessa intensità. I risultati contenuti in questo capitolo sono tratti da [6], [10] e [3] per i teoremi (5.2) , (5.3).

Supponiamo che i filamenti di vortice siano quasi paralleli all'asse z e indichiamo con $\psi_j(s, t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ la funzione che rappresenta la posizione del j -esimo filamento di vortice alla quota s e al tempo t . Ricordiamo che

la velocità con cui si muove ogni punto di ciascun filamento è data dalla somma di due contributi: il primo dovuto dall'autointerazione di un filamento vorticoso con se stesso, il secondo dalla mutua interazione di ogni filamento con gli altri. La velocità autoindotta è stata approssimata con il modello della L.I.A. mentre si è ritenuto che la mutua interazione tra i vortici avvenisse come se i vortici fossero perfettamente paralleli. In base ai modelli considerati il moto di N filamenti di vortice quasi paralleli, ognuno di intensità Γ_j , è governato dal seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = i \cdot \left\{ \Gamma_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial s^2} + \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{\psi_j - \psi_k}{|\psi_j - \psi_k|^2} \right\} & j = 1, 2, \dots, N \\ \psi_j(s, 0) = \psi_{j,0}(s) \end{cases} \quad (5.1)$$

Definizione 5.1 (Stabilità secondo Lyapunov in H^1) Sia $\psi_j^0(s, t)$ una soluzione del sistema (5.1) con dato iniziale $\psi_{j,0}^0(s)$. Sia $v_{j,0}(s) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e

$$\psi_j(s, t) = \psi_j^0(s, t) + v_j(s, t)$$

soluzione del sistema (5.1) con dato iniziale $\psi_{j,0}^0(s) + v_{j,0}(s)$.

Diciamo che la soluzione $\psi_j^0(s, t)$ è stabile secondo Lyapunov se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $v_{j,0}(s) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ con $\|v_{j,0}\|_{H^1} < \delta$, esiste una costante $C > 0$ tale che $\|v_j(s, t)\|_{H^1} < C\delta$ per ogni t .

In particolare studieremo la stabilità dei moti di equilibrio relativo corrispondenti a configurazioni costanti, cioè soluzioni del sistema (5.1) del tipo

$$\psi_j(s, t) = e^{i\nu t} e^{i\omega s} \xi_j \quad j = 1, \dots, N \quad (5.2)$$

nel caso in cui $N = 3$ e le intensità Γ_j identiche tra loro al valore Γ .

Nei capitoli precedenti si è dimostrato che se i filamenti di vortice hanno la stessa intensità, allora le configurazioni costanti si possono ottenere ponendo i punti ξ_j ai vertici di un N -poligono regolare di raggio R , dove R dipende da N , Γ e dalle frequenze ν e ω (4.17). Le soluzioni di questo tipo sono invarianti per rotazione dell' N -poligono regolare di raggio R ai vertici del quale si posizionano i punti ξ_j .

Definizione 5.2 *Siano $\Gamma_j = \Gamma$ per ogni j e siano ν e ω fissati. Definiamo **classe di soluzioni corrispondenti a configurazioni costanti** $Conf(R)$ l'insieme di tutte le soluzioni del sistema (5.1) di tipo elicoidale corrispondenti a configurazioni costanti*

$$Conf(R) = \left\{ \begin{array}{l} \psi_j : \quad \psi_j(s, t) = e^{i\nu t} e^{i\omega s} \xi_j, \quad \xi_j \text{ vertici} \\ \text{di un } N\text{-poligono regolare di raggio } R \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

Per le soluzioni del sistema (5.1) che siano configurazioni costanti definiamo un diverso concetto di stabilità, più debole rispetto alla stabilità secondo Lyapunov.

Definizione 5.3 (Stabilità delle configurazioni) *Sia $\psi_j^0(s, t)$ una configurazione costante, soluzione del sistema di moto di N filamenti vorticosi quasi paralleli della stessa intensità Γ , $\psi_j^0 \in Conf(R)$.*

Diciamo che la soluzione ψ_j^0 è stabile se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $v_{j,0} \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ con $\|v_{j,0}\|_{H^1} < \delta$ allora la soluzione $\psi_j(s, t)$ del sistema (4.4) con dato iniziale $\psi_j^0(s, 0) + v_{j,0}$, può essere scritta, ad ogni istante t , nella forma

$$\psi_j(s, t) = \tilde{\psi}_j(s, t) + v_j(s, t) \quad \tilde{\psi}_j \in Conf(R)$$

e $\sup_t \|\partial_s v_j(s, t)\|_{L^2} < C\delta$ e

$$\left| \frac{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2}{|\tilde{\psi}_j(s, t) - \tilde{\psi}_k(s, t)|^2} - 1 \right|^2 \leq C\delta$$

per una opportuna costante $C > 0$.

Osservazione. Secondo la definizione precedente diremo che un moto di tipo elicoidale ψ_j , corrispondente ad una configurazione costante ξ_j , è stabile se per ogni tempo t la soluzione che si ottiene a partire da una piccola perturbazione in norma H^1 del dato iniziale, rimane in un certo senso vicina, non necessariamente alla soluzione ψ_j di partenza, ma ad una qualsiasi soluzione della stessa classe di ψ_j . In questo senso si intende che tale concetto di stabilità è più debole rispetto alla stabilità secondo Lyapunov.

In seguito, se non espressamente indicato, si intenderà per stabilità il concetto espresso nella definizione (5.3).

Nelle prossime sezioni di questo capitolo riportiamo un teorema dovuto a Kenig, Ponce, Vega [6] in cui si prova la stabilità, per piccole perturbazioni in norma H^1 del dato iniziale, della soluzione del sistema (5.1) nel caso in cui $N = 3$ e $\Gamma_j = \Gamma$, data da tre filamenti di vortice perfettamente paralleli. Dalla stabilità della soluzione descritta da 3 filamenti di vortice perfettamente paralleli, per l'invarianza galileiana descritta nel teorema (4.4) si ricava la stabilità di ogni configurazione costante, soluzione del medesimo problema.

5.1 STABILITA' PER TRE FILAMENTI DI VORTICE PERFETTAMENTE PARAL- LELI

Questa sezione è dedicata alla dimostrazione della stabilità della soluzione del sistema (5.1) nel caso in cui $N = 3$ e $\Gamma_j = \Gamma$, ottenuta a partire da 3 filamenti di vortice perfettamente paralleli posizionati ai vertici di un triangolo equilatero.

Ricordiamo che l'evoluzione di N filamenti di vortice perfettamente paralleli $X_j(s, t) = X_j(t)$ è data dal seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{d}{dt} X_j(t) = i \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{X_j(t) - X_k(t)}{|X_j(t) - X_k(t)|^2} \quad j = 1, \dots, N \quad (5.4)$$

Inoltre, se $\Gamma_j = \Gamma$ e $(X_1(0), X_2(0), \dots, X_N(0))$ sono posti ai vertici di un N -poligono regolare, allora ciascun filamento ruota attorno al centro di vorticità con la stessa velocità angolare e costante nel tempo.

Introduciamo le funzioni a valori complessi $u_j(s, t)$ e poniamo

$$\psi_j(s, t) = \psi_j^0(s, t) + u_j(s, t) \quad j = 1, \dots, N$$

con $\psi_j^0(s, t)$ una qualsiasi soluzione del sistema (5.1). Allora $\psi_j(s, t)$ è soluzione del sistema (5.1) se le funzioni $u_j(s, t)$ soddisfano le relazioni

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = i \left\{ \Gamma_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2} + \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \left(\frac{\psi_j - \psi_k}{|\psi_j - \psi_k|^2} - \frac{\psi_j^0 - \psi_k^0}{|\psi_j^0 - \psi_k^0|^2} \right) \right\}.$$

Dal momento che

$$\begin{aligned}
 & \frac{\psi_j - \psi_k}{|\psi_j - \psi_k|^2} - \frac{\psi_j^0 - \psi_k^0}{|\psi_j^0 - \psi_k^0|^2} \\
 &= \frac{\psi_j - \psi_k - (\psi_j^0 - \psi_k^0)}{|\psi_j - \psi_k|^2} + (\psi_j^0 - \psi_k^0) \left(\frac{1}{|\psi_j - \psi_k|^2} - \frac{1}{|\psi_j^0 - \psi_k^0|^2} \right) \\
 &= \frac{u_j - u_k}{|\psi_j^0 - \psi_k^0 - (u_j - u_k)|^2} \\
 &+ (\psi_j^0 - \psi_k^0) \left(\frac{2\operatorname{Re}((\psi_j^0 - \psi_k^0)(\bar{u}_j - \bar{u}_k)) - |u_j - u_k|^2}{|\psi_j^0 - \psi_k^0 - (u_j - u_k)|^2 |\psi_j^0 - \psi_k^0|^2} \right)
 \end{aligned}$$

si ottiene il seguente problema al valore iniziale per le funzioni $u_j(s, t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial t} = i\Gamma_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2} + i \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{u_j - u_k}{|\psi_j^0 - \psi_k^0 - (u_j - u_k)|^2} \\ \quad + i \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_k}{2\pi} (\psi_j^0 - \psi_k^0) \left(\frac{2\operatorname{Re}((\psi_j^0 - \psi_k^0)(\bar{u}_j - \bar{u}_k)) - |u_j - u_k|^2}{|\psi_j^0 - \psi_k^0 - (u_j - u_k)|^2 |\psi_j^0 - \psi_k^0|^2} \right) \\ u_j(s, 0) = u_{j,0}(s) \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Siano $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ le equazioni che rappresentano l'evoluzione nel tempo di tre filamenti di vortice perfettamente paralleli, soluzione del sistema (5.4) con dato iniziale $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))$ vertici di un triangolo equilatero di lato d e intensità $\Gamma_j = \Gamma$. Il prossimo teorema afferma la stabilità della soluzione $X_j(t)$.

Teorema 5.1 (Stabilità configurazioni costanti)

Sia $N = 3$ e $\Gamma_j = \Gamma$, $j = 1, 2, 3$. Se $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))$ formano un triangolo equilatero di lato $d > 0$, allora esiste $\delta = \delta(d, \Gamma) > 0$ tale che per ogni $(u_{1,0}, u_{2,0}, u_{3,0}) \in (H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}))^3$ con

$$\mu = \sum_{j=1}^3 \|u_{j,0}\|_{H^1} < \delta,$$

il problema al valore iniziale (5.1) ammette un'unica soluzione globale

$(\psi_1, \psi_2, \psi_3)(s, t)$ che può essere scritta nella forma

$$\psi_j(s, t) = X_j(t) - u_j(s, t), \quad j = 1, 2, 3$$

dove (X_1, X_2, X_3) è soluzione del sistema (5.4) e $(u_1, u_2, u_3)(s, t)$ è l'unica soluzione del sistema (5.5), con

$$u_j \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})), \quad j = 1, 2, 3.$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\Gamma^2}{2} \int \left| \frac{\partial}{\partial s} \psi_j(s, t) \right|^2 ds + \sum_{j < k} \frac{\Gamma^2}{4\pi} \int \left(\frac{|\psi_j - \psi_k|(s, t)|^2}{d^2} - 1 \right)^2 ds \right) \leq \lambda$$

dove la costante $\lambda > 0$ dipende da d e da μ con $\lambda(\mu) \downarrow 0$ quando $\mu \downarrow 0$ e

$$\frac{d}{4} \leq \|\psi(\cdot, t) - \psi_k(\cdot, t)\|_\infty \leq 4d \quad j = 1, 2, 3.$$

La dimostrazione del teorema precedente si divide in due fasi:

- nella prima parte si formula una teoria dell'esistenza locale delle soluzioni del sistema (5.1). Si determinano le condizioni dei dati iniziali affinché il sistema (5.1) ammetta una soluzione locale, quindi si stabiliscono le condizioni per cui tale soluzione locale possa essere estesa ad una soluzione globale;

- nella seconda parte si dimostra che nelle ipotesi del teorema (5.1) la soluzione locale verifica le condizioni per cui possa essere estesa ad una soluzione globale.

Prima di cominciare con la dimostrazione enunciamo due teoremi di analisi funzionale.

Teorema 5.2 Sia $u \in H^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\|u^2\|_\infty \leq C \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} \quad (5.6)$$

per una opportuna costante $C > 0$.

Dimostrazione. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} u^2(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial s} (u^2(s)) ds \\ &\leq \int_{-\infty}^t 2|u(s)||u'(s)| ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} 2|u(s)||u'(s)| ds \\ &\leq C\|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} . \end{aligned} \quad (5.7)$$

La tesi segue dal fatto che $H^1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$.

□

Teorema 5.3 (Disuguaglianza di Young) *Siano $a, b > 0$, e $p, p' > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Allora*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} . \quad (5.8)$$

Dimostrazione. La funzione logaritmo è concava su $(0, \infty)$ quindi

$$\log \left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{p'} \log b^{p'} = \log ab .$$

Quindi

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} .$$

□

5.2 TEORIA PER L'ESISTENZA LOCALE

Una soluzione del sistema (4.4) si ottiene considerando soluzioni $X_j(t)$ del sistema di equazioni differenziali ordinarie (5.4) e le corrispondenti soluzioni $u_j(s, t)$ del sistema (5.5).

Si consideri per la soluzione del sistema (5.4) una configurazione iniziale data da $(X_j(0))$ con

$$\inf_{k \neq j} |X_j(0) - X_k(0)| \geq d > 0 . \quad (5.9)$$

Per i teoremi di esistenza locale e di continua dipendenza dai valori iniziali delle soluzioni di ODE, esiste

$$T_0 = T_0(N; X_j(0); \Gamma_j) > 0$$

tale che il sistema (5.4), con dati iniziali $(X_j(0))$, ammetta un'unica soluzione $X_j(t)$ nell'intervallo di tempo $[0, T_0]$ con

$$\inf_{t \in [0, T_0]} \inf_{k \neq j} |X_j(t) - X_k(t)| \geq \frac{d}{2} . \quad (5.10)$$

L'esistenza locale per le soluzioni del problema (5.1) segue dal prossimo teorema che stabilisce le condizioni per cui si abbia esistenza locale delle soluzioni $u_j(s, t)$ per il problema (5.5), con $X_j(t)$ in luogo della generica soluzione $\psi_j^0(s, t)$.

Teorema 5.4 (Teorema esistenza locale)

Sotto le ipotesi (5.9) e assumendo che $\Gamma_j \neq 0$, $j = 1, \dots, N$, allora esiste

$$\delta = \delta(d; N; \Gamma_j) > 0$$

tale che per ogni $u_{j,0} \in H^1(\mathbb{R})$, $j = 1, \dots, N$, con

$$\sum_{j=1}^N \|u_{j,0}\|_{H^1} \leq \delta ,$$

esiste $T \in (0, T_0]$ con $T = T(\delta; d; N; \Gamma_j) > 0$ tale che il problema al valore iniziale (5.5) abbia un'unica soluzione locale

$$u_j \in C\left([0, T] : H^1(\mathbb{R})\right), \quad j = 1, \dots, N$$

con

$$\inf_{t \in [0, T]} \inf_{k \neq j} \|X_j(t) - X_k(t) - (u_j(\cdot, t) - u_k(\cdot, t))\|_\infty \geq \frac{d}{4}.$$

Inoltre la mappa che al vettore $\vec{u}_0 = (u_{1,0}, \dots, u_{N,0}) \in (H^1(\mathbb{R}))^N$ associa $\vec{u}(\cdot, t) = (u_1, \dots, u_N)(\cdot, t)$, definita da un intorno dell'origine di $(H^1(\mathbb{R}))^N$ in $C([0, T] : (H^1(\mathbb{R}))^N)$ è localmente lipschitziana.

Dimostrazione. Definiamo l'operatore

$$\Phi : C([0, T_0] : (H^1(\mathbb{R}))^N) \rightarrow C([0, T_0] : (H^1(\mathbb{R}))^N) \quad (5.11)$$

nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (\Phi \vec{v})_j(t) &= e^{i\Gamma_j t \partial_s^2} u_{j,0} + \frac{i}{2\pi} \int_0^t e^{i\Gamma_j(t-t') \partial_s^2} \sum_{k \neq j} \Gamma_k \left(\frac{v_j - v_k}{|X_j - X_k - (v_j - v_k)|^2} \right. \\ &\quad \left. + (X_j - X_k) \left(\frac{2\operatorname{Re}((X_j - X_k)(\bar{u}_j - \bar{u}_k)) - |u_j - u_k|^2}{|X_j - X_k - (u_j - u_k)|^2 |X_j - X_k|^2} \right) \right) (t') dt'. \end{aligned}$$

Un vettore $\vec{v}$ è soluzione del sistema (5.5) se

$$\Phi(\vec{v}) = \vec{v} \quad (5.12)$$

cioè se $\vec{v}$ è un punto fisso dell'operatore Φ .

Dimostriamo che, sotto opportune condizioni, Φ è una contrazione quindi, per il teorema delle contrazioni, Φ ammette un punto fisso.

Essendo l'operatore $e^{i\Gamma_j t \partial_s^2}$ unitario su L^2 , calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (\Phi \vec{v})_j(t) &= e^{i\Gamma_j t \partial_s^2} \partial_s v_{j,0} \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_0^t e^{i\Gamma_j(t-t') \partial_s^2} \sum_{k \neq j} \Gamma_k \left\{ \frac{\partial_s(v_j - v_k)}{|X_j - X_k - (v_j - v_k)|^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(-2\operatorname{Re}((X_j - X_k)(\partial_s(\bar{v}_j - \bar{v}_k))) + \partial_s |v_j - v_k|^2 \right) (v_j - v_k)}{|X_j - X_k - (v_j - v_k)|^4} \right\} dt'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(2\operatorname{Re}\left((X_j - X_k)(\partial_s(\bar{v}_j - \bar{v}_k))\right) - \partial_s|v_j - v_k|^2\right)(X_j - X_k)}{|X_j - X_k|^2|X_j - X_k - (v_j - v_k)|^2} \\
& - \left(\frac{\left(2\operatorname{Re}\left((X_j - X_k)(\bar{v}_j - \bar{v}_k)\right) - |v_j - v_k|^2\right)(X_j - X_k)}{|X_j - X_k|^2|X_j - X_k - (v_j - v_k)|^4}\right) \\
& \cdot \left(-2\operatorname{Re}\left((X_j - X_k)(\partial_s(\bar{v}_j - \bar{v}_k))\right) + \partial_s|v_j - v_k|^2\right)\Big\}(t') dt' .
\end{aligned}$$

Per $\delta > 0$ abbastanza piccolo, dipendente da d , se $\vec{v} \in C([0, T] : (H^1(\mathbb{R}))^N)$ con

$$\sup_{t \in [0, T_0]} \sum_{j=1}^N \|v_j(\cdot, t)\|_{H^1} \leq 2\delta$$

allora

$$\inf_{t \in [0, T_0]} \inf_{k \neq j} \|X_j(t) - X_k(t) - (u_j(\cdot, t) - u_k(\cdot, t))\|_{\infty} \geq \frac{d}{4} .$$

Introduciamo la notazione

$$\|v_j\|_{T,p} = \sup_{t \in [0, T]} \|v_j(\cdot, t)\|_p, \quad p \in [1, \infty], \quad T \in (0, T_0]$$

e

$$|\Gamma| = \sum_{j=1}^N |\Gamma_j| .$$

Allora esiste una costante C , incrementata di volta in volta se necessario, per cui

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\vec{v})_j\|_{T,2} & \leq \|u_{j,0}\|_2 + \frac{C|\Gamma|T}{d^2} \sum_{k \neq j} \|v_j - v_k\|_{T,2} \\
& + \frac{C|\Gamma|T}{d^3} \sum_{k \neq j} \|v_j - v_k\|_{T,\infty} \|v_j - v_k\|_{T,2}
\end{aligned}$$

e

$$\|\partial_s(\Phi\vec{v})_j\|_{T,2} \leq \|\partial_s u_{j,0}\|_2 + \frac{C|\Gamma|T}{d^2} \sum_{k \neq j} \|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C|\Gamma|T}{d^3} \sum_{k \neq j} \|v_j - v_k\|_{T,\infty} \|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2} \\
& + \frac{C|\Gamma|T}{d^4} \sum_{k \neq j} \|v_j - v_k\|_{T,\infty}^2 \|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2} \\
& + \frac{C|\Gamma|T}{d^5} \sum_{k \neq j} \|v_j - v_k\|_{T,\infty}^3 \|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2} .
\end{aligned}$$

Per il teorema (5.2) si ha

$$\|v_j - v_k\|_{T,\infty} \leq \|v_j - v_k\|_{T,2}^{1/2} \|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2}^{1/2} .$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\|v_j - v_k\|_{T,2} & \leq \|v_j\|_{T,2} + \|v - k\|_{T,2} \\
\|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2} & \leq \|\partial_s v_j\|_{T,2} + \|\partial_s v_k\|_{T,2} .
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left(\|\Phi(\vec{v})_j\|_{T,2} + \|\partial_s \Phi(\vec{v})_j\|_{T,2} \right) \leq \sum_{j=1}^N \left(\|u_{j,0}\|_2 + \|\partial_s u_{j,0}\|_2 \right) \\
& + CT \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k \neq j} \left(\|v_j\|_{T,2} + \|v_k\|_{T,2} \right) + \sum_{k \neq j} \|v_j - v_k\|_{T,2}^{3/2} \|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2}^{1/2} \right. \\
& + \sum_{k \neq j} \left(\|\partial_s v_j\|_{T,2} + \|\partial_s v_k\|_{T,2} \right) + \sum_{k \neq j} \left(\|v_j - v_k\|_{T,2}^{1/2} \|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2}^{3/2} \right) \\
& + \sum_{k \neq j} \left(\|v_j - v_k\|_{T,2} \|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2}^2 \right) \\
& \left. + \sum_{k \neq j} \left(\|v_j - v_k\|_{T,2}^{3/2} \|\partial_s(v_j - v_k)\|_{T,2}^{5/2} \right) \right)
\end{aligned}$$

dove le costanti C dipendente da d e $|\Gamma|$.

Per $T > 0$ abbastanza piccolo

$$\sum_{j=1}^N \left(\|\Phi(\vec{v})_j\|_{T,2} + \|\partial_s \Phi(\vec{v})_j\|_{T,2} \right) \leq 2 \sum_{j=1}^N \|v_{j,0}\|_{H^1} \leq 2\delta . \quad (5.13)$$

Analogamente, per $T > 0$ abbastanza piccolo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left(\|\Phi(\vec{v} - \vec{w})_j\|_{T,2} + \|\partial_s \Phi(\vec{v} - \vec{w})_j\|_{T,2} \right) \leq \\ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \left(\|(\vec{v} - \vec{w})_j\|_{T,2} + \|\partial_s(\vec{v} - \vec{w})_j\|_{T,2} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Le (5.13) e (5.14) provano che l'operatore Φ sia una contrazione sulla palla di raggio 2δ centrata nell'origine di $C([0, T] : (H^1(\mathbb{R}))^N)$. Allora, per il teorema delle contrazioni, esiste un elemento di $C([0, T] : (H^1(\mathbb{R}))^N)$ che sia punto fisso per Φ e quindi soluzione del sistema (5.5) nell'intervallo di tempo $[0, T]$.

Dalla dimostrazione precedente segue che l'esistenza locale della soluzione può essere estesa ad ogni intervallo $[0, T^*]$ se vale la seguente stima a priori:

$$\|(v_j - v_k)(\cdot, t)\|_\infty \leq M \quad \forall t \in [0, T^*]$$

per una opportuna costante $M > 0$, indipendente da T^* , e

$$\inf_{j \neq k} \|(X_j - X_k)(t) - (v_j - v_k)(\cdot, t)\|_\infty \geq \frac{d}{4} \quad \forall t \in [0, T^*]$$

con $X_j(t)$ soluzione del sistema (5.4).

Le stime precedenti esprimono il fatto che una soluzione locale $\vec{v}$ fino al tempo T possa essere ulteriormente estesa per un ulteriore intervallo di tempo se $\vec{v}(s, T)$ si trova abbastanza vicina ad una soluzione $X_j(T)$ del sistema imperturbato. Si osservi inoltre che il termine $d/4$ della relazione precedente non è fondamentale; l'importante è che sia una costante maggiore di zero, cioè i filamenti rimangono ad una distanza reciproca diversa da zero.

5.3 ESISTENZA GLOBALE DELLA SOLUZIONE

In questa sezione concludiamo la dimostrazione del teorema (5.1) riguardante la stabilità della soluzione del sistema (5.1) data da tre filamenti di vortice perfettamente paralleli, aventi la stessa circolazione, la cui intersezione con qualsiasi piano perpendicolare ai filamenti è un triangolo equilatero.

Poniamo $(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ la soluzione descritta con dato iniziale $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))$ e

$$\psi_j(s, t) = X_j(t) - v_j(s, t)$$

con la perturbazione a valori complessi $\vec{v}(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R})$ per ogni t . Allora $\psi_j(s, t)$ è soluzione del sistema di moto se $v_j(s, t)$ è soluzione del sistema (5.5) con dato iniziale $u_{j,0}(s)$.

Ricordiamo che se $\Gamma_j = \Gamma$, $j = 1, 2, 3$ e $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))$ forma un triangolo equilatero di lato $d > 0$, allora

$$|X_j(t) - X_k(t)| = d \quad j, k = 1, 2, 3 \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Inoltre le soluzioni del sistema (5.1) soddisfano le seguenti leggi di conservazione

$$H = \int \left(\sum_{j=1}^N \left(-\frac{\Gamma_j^2}{2} \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial s} \right|^2 + \sum_{k>j} \frac{\Gamma_j \Gamma_k}{4\pi} \log |\psi_j - \psi_k|^2 \right) \right) ds$$

$$A = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \int |\psi_j(s, t)|^2 ds \quad (5.15)$$

e se $\Gamma_j = \Gamma$, $j = 1, \dots, N$ si conserva la quantità

$$I = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{k>j} \Gamma^2 \int |\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2 ds .$$

Osservazione. Nel caso di filamenti di vortice quasi paralleli le quantità appena scritte non sono finite, dal momento che ogni integranda non tende a zero per s che tende all'infinito.

Nella sezione precedente si è dimostrato che il sistema (5.1) ammette una soluzione locale nel tempo a partire da un dato iniziale che sia una piccola perturbazione rispetto alla configurazione di N vortici perfettamente paralleli. Nella dimostrazione che segue mostreremo che nel caso di $N = 3$ e $\Gamma_j = \Gamma$ $j = 1, 2, 3$ la soluzione locale si estende ad ogni intervallo di tempo.

Dimostrazione del teorema (5.1) Sia $N = 3$ e $\Gamma_j = \Gamma$ $j = 1, 2, 3$. Sia $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))$ la configurazione iniziale data da tre filamenti di vortice perfettamente paralleli, tale che $|X_j(0) - X_k(0)| = d$ $j, k = 1, 2, 3$ e $(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ la soluzione al tempo t . Allora

$$|X_j(t) - X_k(t)| = d \quad j, k = 1, 2, 3 \quad \forall t \quad (5.16)$$

e si conserva nel tempo la funzione Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k>j} \frac{\Gamma^2}{4\pi} \int \log |X_j - X_k|^2 ds \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k>j} \frac{\Gamma^2}{4\pi} \int \log d^2 ds . \end{aligned}$$

Se $\psi_j(s, t) = X_j(t) - v_j(s, t)$ è soluzione del sistema (5.1) allora si conserva nel tempo la corrispondente funzione Hamiltoniana

$$H_2 = -\frac{\Gamma^2}{2} \sum_{j=1}^3 \int \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial s} \right|^2 ds + \sum_{j=1}^3 \sum_{k>j} \frac{\Gamma^2}{4\pi} \int \log |\psi_j - \psi_k|^2 ds .$$

Quindi rimane costante nel tempo anche la differenza $H^* = H_2 - H_1$

$$H^* = -\frac{\Gamma^2}{2} \sum_{j=1}^3 \int \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial s} \right|^2 ds + \sum_{j=1}^3 \sum_{k>j} \frac{\Gamma^2}{4\pi} \int \log \left(\frac{|\psi_j - \psi_k|^2}{d^2} \right) ds .$$

Inoltre essendo le intensità tutte uguali tra loro si ha la conservazione delle quantità

$$I_1 = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{k>j} \Gamma^2 \int d^2 ds$$

$$I_2 = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{k>j} \Gamma^2 \int |\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2 ds$$

e della differenza $I^* = I_2 - I_1$

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^3 \sum_{k>j} \Gamma^2 \int \left(|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2 - d^2 \right) ds \\ &= \frac{d^2}{8\pi} \sum_{j=1}^3 \sum_{k>j} \Gamma^2 \int \left(\frac{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2}{d^2} - 1 \right) ds . \end{aligned}$$

Consideriamo quindi la quantità $W = -H^* + \frac{2}{d^2} I^*$

$$\begin{aligned} W &= \frac{\Gamma^2}{2} \sum_{j=1}^3 \int \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial s} \right|^2 ds \\ &+ \frac{\Gamma^2}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \sum_{k>j} \int \left(-\log \left(\frac{|\psi_j - \psi_k|^2}{d^2} \right) + \frac{|\psi_j(s, t) - \psi_k(s, t)|^2}{d^2} - 1 \right) ds \end{aligned}$$

allora, essendo somma di quantità conservate, anche W si conserva nel tempo.

Sia $\psi_j(s, t) = X_j(t) - v_j(s, t)$ con $\vec{v} \in C([0, T] : (H^1(\mathbb{R}))^3)$ una soluzione locale del sistema (5.1), con

$$\sum_{j=1}^3 \|u_{j,0}\|_{H^1} = \mu .$$

Allora poniamo $W(\psi)(t) = W(\psi)(0) = \lambda$. Mostriamo che $\lambda \downarrow 0$ quando $\mu \downarrow 0$.

Notiamo che se $x \in [1/4, 4]$ allora

$$f(x) = -\log(x) + x - 1 \leq 100(x - 1)^2 .$$

Ponendo

$$x = \frac{|\psi_j - \psi_k|^2}{d^2}$$

si ha

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 &= \left(\frac{|\psi_j - \psi_k|^2}{d^2} - 1 \right)^2 = \left(\frac{|X_j - X_k - (v_j - v_k)|^2}{d^2} - 1 \right)^2 \\ &= \left(\frac{-2\operatorname{Re}(\bar{X}_j - \bar{X} - k)(v_j - v_k) + |v_j - v_k|^2}{d^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

in quanto $|(X_j - X_k)(t)|^2 = d^2$.

Se $v_j \in H^1(\mathbb{R})$ allora la quantità (5.3) appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$. Infatti

$$\begin{aligned} &\int \left| \left(\frac{-2\operatorname{Re}(\bar{X}_j - \bar{X} - k)(v_j - v_k) + |v_j - v_k|^2}{d^2} \right)^2 \right| ds \leq \\ &\int 2 \left| \frac{4|\bar{X}_j - \bar{X} - k|^2 |v_j - v_k|^2 + |v_j - v_k|^4}{d^4} \right| ds \leq \\ &\frac{8}{d^2} \int |v_j - v_k|^2 ds + \frac{2}{d^4} |v_j - v_k|_\infty^2 \int |v_j - v_k|^2 ds . \end{aligned}$$

Quindi se $\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$

$$\frac{d}{2} \leq |(\psi_j - \psi_k)(s, t)| \leq 2d \quad (5.18)$$

si ha

$$\begin{aligned} \lambda = W(t) = W(0) &\leq \sum_{j=1}^3 \frac{\Gamma^2}{2} \int |\partial_s u_{j,0}|^2 ds \\ &+ 100 \frac{\Gamma^2}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \sum_{k>j} \int \left(\frac{-2\operatorname{Re}(\bar{X}_j - \bar{X}_k)(v_j - v_k) + |v_j - v_k|^2}{d^2} \right)^2 ds . \end{aligned}$$

Applicando la formula (5.6) all'ultimo integrale della relazione precedente, otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{-2\operatorname{Re}(\bar{X}_j - \bar{X}_k)(v_j - v_k) + |v_j - v_k|^2}{d^2} \right)^2 ds \leq \\
& 2 \int \frac{4d^2|v_j - v_k|^2 + |v_j - v_k|^4}{d^4} ds \leq \\
& \frac{2}{d^4} \left(8d^2 \int (|v_{j,0}|^2 + |v_{k,0}|^2) ds + \|v_{j,0} - v_{k,0}\|_\infty^2 \int |v_{j,0} - v_{k,0}|^2 ds \right) \leq \\
& \frac{2}{d^4} \left(8d^2 \int (|v_{j,0}|^2 + |v_{k,0}|^2) ds \right. \\
& \quad \left. + c\|v_{j,0} - v_{k,0}\|_2 \|\partial_s(v_{j,0} - v_{k,0})\|_2 \int |v_{j,0} - v_{k,0}|^2 ds \right) \leq \\
& \frac{2}{d^4} \left(8d^2 \int (|v_{j,0}|^2 + |v_{k,0}|^2) ds + c\|v_{j,0} - v_{k,0}\|_2^3 \|\partial_s(v_{j,0} - v_{k,0})\|_2 \right)
\end{aligned}$$

quindi $\lambda(\mu) \downarrow 0$ per $\mu = \sum_{j=1}^3 \|v_{j,0}\|_{H^1} \downarrow 0$.

D'altra parte se per un certo t fissato vale la (5.18), allora

$$-\log \left(\frac{|\psi_j - \psi_k|^2}{d^2} \right) + \frac{|\psi_j - \psi_k|^2}{d^2} - 1 \geq \frac{1}{10} \left(\frac{|\psi_j - \psi_k|^2}{d^2} - 1 \right)^2.$$

Quindi

$$\lambda \leq \frac{\Gamma^2}{2} \sum_{j=1}^3 \int \left| \frac{\partial \psi_j}{\partial s} \right|^2 ds + \frac{1}{10} \frac{\Gamma^2}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \sum_{k>j} \int \left(\frac{|\psi_j - \psi_k|^2}{d^2} - 1 \right)^2 ds \leq 0.$$

Dalla relazione precedente cerchiamo una stima di $\frac{\|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)\|_\infty^2}{d^2}$.

Sia

$$M_{j,k}(s, t) = \frac{|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)|}{d^2}$$

allora

$$\frac{\partial}{\partial s} M_{j,k}(s, t) = \frac{(\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_k) \partial_s(\psi_j - \psi_k) + (\psi_j - \psi_k) \partial_s(\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_k)}{d^2}.$$

Per la formula (5.6) e la disuguaglianza di Young (5.8) si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)\|_\infty^2}{d^2} &\leq \left\| \frac{(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)}{d^2} - 1 \right\|_\infty^2 + 1 \leq \\
1 + c \left\| \frac{|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)|^2}{d^2} - 1 \right\|_2^{1/2} &\left\| \frac{(\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_k) \partial_s (\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)}{d^2} \right\|_2^{1/2} \leq \\
1 + c \frac{(40\pi)^{1/4} \lambda^{1/4}}{\Gamma^{1/2} d^{1/2}} &\frac{\|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)\|_\infty^{1/2}}{d^{1/2}} \|\partial_s (\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)\|_2^{1/2} \leq \\
1 + c \frac{2^{5/4} (40\pi)^{1/4} \lambda^{1/2}}{\Gamma} &\frac{\|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)\|_\infty^{1/2}}{d^{1/2}} \leq \\
1 + \frac{1}{4} \frac{\|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)\|_\infty^{1/2}}{d^2} &+ \frac{3}{4} c^{4/3} \frac{2^{5/3} (40\pi)^{1/3}}{\Gamma^{4/3}} \left(\frac{\lambda^{1/2}}{d^{1/2}} \right)^{4/3}.
\end{aligned}$$

Ne segue quindi che se $\frac{d}{2} \leq |(\psi_j - \psi_k)(s, t)| \leq 2d$ per un certo t e per ogni s , allora

$$\frac{3}{4} \frac{\|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)\|_\infty^2}{d^2} \leq 1 + \frac{3}{4} c^{4/3} \frac{2^{5/3} (40\pi)^{1/3}}{\Gamma^{4/3}} \left(\frac{\lambda^{1/2}}{d^{1/2}} \right)^{4/3}$$

quindi

$$\|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)\|_\infty^2 \leq d^2 \left(\frac{4}{3} + c^{4/3} \frac{2^{5/3} (40\pi)^{1/3}}{\Gamma^{4/3}} \left(\frac{\lambda^{1/2}}{d^{1/2}} \right)^{4/3} \right).$$

Analogamente, se $\frac{d}{2} \leq |(\psi_j - \psi_k)(s, t)| \leq 2d$ per un certo t e per ogni s si ottiene la seguente relazione

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)|^2}{d^2} - 1 \right\|_\infty \leq \\
c \left\| \frac{|(\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)|^2}{d^2} - 1 \right\|_2^{1/2} &\frac{\|\partial_s (\psi_j - \psi_k)(\cdot, t)\|_2^{1/2}}{d^{1/2}} \\
&\leq c \frac{2^{5/4} (40\pi)^{1/4} \lambda^{1/2}}{\Gamma} \frac{1}{d^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Di seguito poniamo $K = c \frac{2^{5/4} (40\pi)^{1/4}}{\Gamma}$.

Quindi finchè esiste una soluzione locale in un intervallo di tempo $[0, T]$ che soddisfa la condizione $\frac{d}{2} \leq |(\psi_j - \psi_k)(s, t)| \leq 2d$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ e per un cert $t \in [0, T]$, allora dalla (5.19) segue che

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \frac{(\psi_j - \psi_k)(s, t)^2}{d^2} - 1 \right| \leq K \frac{\lambda^{1/2}}{d^{1/2}}. \tag{5.20}$$

La relazione precedente esprime il fatto che per λ abbastanza piccolo la configurazione $\psi_j(s, t)$ è tale che per ogni s e per ogni $t \in [0, T]$ la mutua distanza tra i filamenti rimane prossima a d , quindi vicina ad una soluzione del problema imperturbato.

Infatti dalla (5.20) si ottiene per ogni $(s, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$

$$-K \frac{\lambda^{1/2}}{d^{1/2}} \leq \frac{|(\psi_j - \psi_k)(s, t)|^2 - 1}{d^2} \leq K \frac{\lambda^{1/2}}{d^{1/2}}$$

e per λ abbastanza piccolo

$$\frac{d}{2} < \left(1 - K \frac{\lambda^{1/2}}{d^{1/2}}\right)^{1/2} d \leq |(\psi_j - \psi_k)(s, t)| \leq d \left(1 + K \frac{\lambda^{1/2}}{d^{1/2}}\right)^{1/2} < 2d. \quad (5.21)$$

Inoltre, essendo

$$|(\psi_j - \psi_k)(s, t)| = |(X_j - X_k)(t) - (v_j - v_k)(s, t)| < 2d \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$$

per la (5.16) si ottiene

$$\|v_j - v_k\|_{T, \infty} = \sup_{t \in [0, T]} \|(v_j - v_k)(\cdot, t)\|_{\infty} \leq 3d. \quad (5.22)$$

Quindi la tesi segue dalle stime (5.21), (5.22) e dal fatto, provato in precedenza, che $\lambda(\mu) \downarrow 0$ quando $\mu \downarrow 0$.

□

Osservazione. Si osservi che la dimostrazione si basa sul fondamentale fatto che le distanze tra i filamenti di vortice siano tutte uguali tra loro e costanti per ogni tempo t e per ogni s . Questa condizione può essere ottenuta solo nel caso in cui il numero di filamenti sia 2 o 3.

Appendice A

VARIAZIONE DI UN FUNZIONALE

In seguito è definito il concetto di variazione di funzionale nella forma in cui è stato usato nel corso di questa tesi. Quanto segue è tratto da [9]; si consiglia [12] per approfondimenti.

Sia $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ e F un funzionale definito come

$$F(u) = \int_a^b \mathcal{F}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) dx .$$

con $\mathcal{F}$ differenziabile in tutte le sue variabili.

Sia $\delta u(x)$ una variazione della funzione $u(x)$ e si pone

$$\delta u_x = \frac{d}{dx} \delta u . \tag{A.1}$$

Calcoliamo la variazione del funzionale F dovuto ad una variazione δu della funzione u .

Definizione A.1 Si definisce **prima variazione** di F rispetto a δu la quantità

$$\delta F(u; \delta u) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [F(u + \varepsilon \delta u) - F(u)] .$$

Calcoliamo $\delta F(u; \delta u)$.

$$\begin{aligned} \delta F(u; \delta u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b \mathcal{F}(x, u + \varepsilon \delta u, u_x + \varepsilon \delta u_x, u_{xx} + \varepsilon \delta u_{xx}, \dots) \\ &\quad - \mathcal{F}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) dx \\ &= \int_a^b \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\mathcal{F}(x, u + \varepsilon \delta u, u_x + \varepsilon \delta u_x, u_{xx} + \varepsilon \delta u_{xx}, \dots) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{F}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{xx}} \delta u_{xx} + \dots \right) dx \end{aligned}$$

per la (A.1), integrando per parti la relazione precedente, si ottiene

$$\begin{aligned} \delta F(u; \delta u) &= \int_a^b \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} \delta u dx + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} \delta u \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} \delta u dx \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{xx}} \delta u_x \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{xx}} \delta u_x dx \right) + \dots \end{aligned}$$

Integrando ulteriormente per parti tutti gli integrali contenenti il termine δ_x , si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} \delta F(u; \delta u) &= \int_a^b \delta u \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{xx}} - \dots \right) dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} \delta u + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{xx}} \delta u_x - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{xx}} \delta u + \dots \right) \Big|_a^b \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine è il contributo al contorno.

Se scegliamo la variazione δu tale che

$$\delta u(a) = \delta u(b) = 0, \quad \delta u_x(a) = \delta u_x(b) = 0 \dots$$

allora il termine al contorno si annulla e rimane

$$\delta F(u; \delta u) = \left\langle \frac{\delta F}{\delta u}, \delta u \right\rangle$$

con

$$\frac{\delta F}{\delta u} := \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{xx}} - \dots$$

Appendice B

ESISTENZA E UNICITA', LOCALE DELLE SOLUZIONI PER O.D.E

Riportiamo alcuni classici risultati, fondamentali nella teoria delle equazioni differenziali.

In particolare dimostriamo alcuni teoremi riguardanti le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie con dato iniziale [12]. Siamo interessati al metodo con cui sono stati ottenuti i risultati, perchè lo stesso metodo si applica per la ricerca di soluzioni di qualsiasi sistema di equazioni differenziali con dato iniziale.

Definizione B.1 (Funzione lipschitziana.) *Sia $f : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$, D aperto. Si dice che $f = f(t, y)$ è lipschitziana in D rispetto ad y , uniformemente in t , se esiste una costante L tale che*

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\| \quad (\text{B.1})$$

per ogni coppia di punti $(t, y), (t, z)$ in D .

Si dice che $f = f(t, y)$ è localmente lipschitziana in D rispetto ad y , uniformemente in t , se ogni punto di D ha un intorno per cui vale (B.1), con L dipendente dall'intorno. L è detta costante di Lipschitz.

Teorema B.1 (Teorema di esistenza e unicità locale)

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con D aperto in $\mathbb{R}^{n+1}$. Se

i) f continua in D ,

ii) f è localmente lipschitziana in D , rispetto ad y e uniformemente in t , allora, per ogni punto $(\tau, \xi) \in D$ esiste un intorno I_δ di τ , $I_\delta = [\tau - \delta, \tau + \delta]$, nel quale è definita una soluzione ϕ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Tale soluzione è unica, nel senso che ogni altra soluzione coincide con ϕ nell'intervallo comune di definizione.

Useremo in seguito la notazione $\phi(t; \tau, \xi)$ quando servirà mettere in evidenza il dato iniziale $\phi(\tau) = \xi$. Si osservi che, essendo f continua in D , la soluzione ϕ risulta essere di classe $C^1(I_\delta)$.

Per la dimostrazione del teorema ci serviranno del seguente lemma.

Lemma B.1 Valgano le ipotesi del teorema (B.1). Se $\phi \in C^1(I_\delta)$ è soluzione del problema di Cauchy (B.2), allora ϕ soddisfa la seguente equazione integrale.

$$y(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, y(s)) ds \quad \forall t \in I_\delta. \quad (\text{B.3})$$

Viceversa, se $\phi \in C(I_\delta)$ è soluzione di (B.3) allora $\phi \in C^1(I_\delta)$ ed è soluzione del problema di Cauchy (B.2).

Dimostrazione. Sia $\phi \in C^1(I_\delta)$ soluzione del problema (B.2). Integriamo ϕ tra τ e t , $t \in I_\delta$. Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale e la condizione iniziale $\phi(\tau) = \xi$, si ottiene

$$\phi(t) - \xi = \int_{\tau}^t f(s, \phi(s)) ds$$

cioè la (B.3).

Viceversa, sia $\phi \in C(I_\delta)$ soluzione di (B.3), allora ϕ è automaticamente $C^1(I_\delta)$, essendola la funzione $\int_{\tau}^t f(s, \phi(s)) ds$. Derivando la (B.3) si ottiene

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)) \quad \forall t \in I_\delta$$

e, sostituendo $t = \tau$ nella (B.3), si deduce $\phi(\tau) = \xi$.

□

Dimostrazione del teorema (B.1). Per il lemma precedente basta mostrare che, per un opportuno δ , l'equazione (B.3) ha un'unica soluzione in I_δ . Interpretiamo tale equazione come equazione di punto fisso, introducendo il seguente operatore:

$$y(t) \mapsto F[y](t) := \xi + \int_{\tau}^t f(s, y(s)) ds \quad t \in I_\delta \quad (\text{B.4})$$

ben definito sulle funzioni $y = y(t)$ che hanno il grafico contenuto in D . Risolvere l'equazione (B.3) equivale a trovare $\phi \in C(I_\delta)$ che sia un punto fisso per F , $F[\phi] = \phi$.

Ci serviremo del teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli: occorre quindi trovare uno spazio metrico completo Y tale che $F[Y] \subseteq Y$, nel quale F sia una contrazione. Si osservi che $Y = C(I_\delta)$ non è accettabile in quanto vi sono funzioni in $C(I_\delta)$ che non hanno il grafico contenuto in D .

Siano allora $a, b \in \mathbb{R}_+$, tali che

$$\Gamma := \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - \tau| \leq a, \|y - \xi\| \leq b\}$$

sia contenuto in D .

Sia

$$Y := \{\phi \in C(I_\delta) : \|\phi(t) - \xi\| \leq b, \forall t \in I_\delta\}$$

lo spazio delle funzioni continue in I_δ , il cui grafico sia contenuto in Γ . Lo spazio Y , dotato con la metrica della convergenza uniforme

$$d(\phi, \psi) = \max_{t \in I_\delta} \|\phi(t) - \psi(t)\|$$

è metrico completo. L'operatore (B.4) è ben definito in Y . Rimane da scegliere δ tale che:

- i) $F[Y] \subseteq Y$,
 - ii) F sia una contrazione in Y , ovvero che esista α , $0 \leq \alpha < 1$, tale che
- $$d(F[\phi], F[\psi]) \leq \alpha d(\phi, \psi).$$

Occupiamoci di i). Chiaramente se $\phi \in Y$, allora anche $F[\phi] \in C(I_\delta)$.

Poniamo $M = \max_{(t,y) \in \Gamma} \|f(t, y)\|$. Ne segue che, per ogni $t \in \delta$

$$\|F[\phi](t) - \xi\| = \left\| \int_\tau^t f(s, \phi(s)) ds \right\| \leq \left| \int_\tau^t \|f(s, \phi(s))\| ds \right| \leq M|t - \tau| \leq M\delta.$$

Quindi, se $M\delta \leq b$, cioè $\delta \leq \frac{b}{M}$, allora $F[\phi] \in Y$.

Passiamo ora alla ii). Per ogni coppia $\phi, \psi \in Y$ e ogni $T \in I_\delta$, detta L la costante di Lipschitz di f relativa al compatto Γ , si ha

$$\begin{aligned} \|F[\phi](t) - F[\psi](t)\| &= \left\| \int_\tau^t (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_\tau^t \|f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq L \left| \int_{\tau}^t \|\phi(s) - \psi(s)\| ds \right| \leq L|t - \tau| d(\phi, \psi) \\
&\leq L\delta d(\phi, \psi) .
\end{aligned}$$

Scegliendo $\delta < \frac{1}{L}$ si ottiene che F è una contrazione di costante $L\delta < 1$.

Quindi se $\delta < \min\{a, b/M, 1/L\}$ esiste un unico punto fisso per F in Y .

D'altra parte se ϕ_1 è un'altra soluzione dell'equazione (B.3), necessariamente $\phi_1 \in Y$ e quindi coincide con l'unico punto fisso di F in Y .

□

Teorema B.2 (Dipendenza delle soluzioni dai dati iniziali)

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, D aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f = f(t, y)$ continua e localmente lipschitziana rispetto a y , uniformemente in t . Supponiamo che per ogni (τ, ξ) in un intorno A di $(\tau_0, \xi_0) \in D$, ogni soluzione $\phi(t; \tau, \xi)$ sia definita in un intervallo comune $[\tau_1, \tau_2]$.

Se $(\tau, \xi) \rightarrow (\tau_0, \xi_0)$, $(\tau, \xi) \in A$, allora $\phi(t; \tau, \xi) \rightarrow \phi(t; \tau_0, \xi_0)$ uniformemente in $t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Per la dimostrazione ci serviremo del seguente lemma.

Lemma B.2 *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $\tau \in I$. Siano inoltre $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue in I , non negative e sia $c \in \mathbb{R}_+$. Se*

$$v(t) \leq c + \left| \int_{\tau}^t u(s)v(s) ds \right| \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

allora

$$v(t) \leq c e^{\left| \int_{\tau}^t u(s) ds \right|} \quad \forall t \in I . \quad (\text{B.6})$$

Dimostrazione. Sia $t \geq \tau$. Poniamo

$$w(t) = c + \int_{\tau}^t u(s)v(s) ds .$$

Allora $w'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)w(t)$, per ipotesi. Di conseguenza

$$\frac{d}{dt} \left(w(t) e^{-\int_{\tau}^t u(s) ds} \right) = e^{-\int_{\tau}^t u(s) ds} (w'(t) - u(t)w(t)) \leq 0 .$$

Segue che

$$e^{-\int_{\tau}^t u(s) ds} w(t) \leq w(t) = c$$

da cui la tesi.

□

Dimostrazione del teorema (B.2) Restringendo eventualmente l'intorno A di (τ_0, ξ_0) , si può trovare un compatto $\Gamma \subset D$ che contiene tutti i grafici delle funzioni $\phi(t; \tau, \xi)$ per $(\tau, \xi) \in A$.

Siano $M = \max_{(t,y) \in \Gamma} \|f(t, y)\|$ e L la costante di Lipschitz di f in Γ . Dall'equazione (B.3) si ha, per ogni $t \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\phi(t; \tau, \xi) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \phi(s; \tau, \xi)) ds$$

e

$$\phi(t; \tau_0, \xi_0) = \xi_0 + \int_{\tau_0}^t f(s, \phi(s; \tau_0, \xi_0)) ds .$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\begin{aligned} \|\phi(t; \tau, \xi) - \phi(t; \tau_0, \xi_0)\| &\leq \|\xi - \xi_0\| \\ &+ \left\| \int_{\tau_0}^t f(s, \phi(s; \tau_0, \xi_0)) ds \right\| + \left\| \int_{\tau}^t \left(f(s, \phi(s; \tau, \xi)) - f(s, \phi(s; \tau_0, \xi_0)) \right) ds \right\| . \end{aligned}$$

Da cui si ricava

$$\begin{aligned} \|\phi(t; \tau, \xi) - \phi(t; \tau_0, \xi_0)\| &\leq \|\xi - \xi_0\| + M|\tau - \tau_0| \\ &+ \left| \int_{\tau}^t L \|\phi(s; \tau, \xi) - \phi(s; \tau_0, \xi_0)\| ds \right|. \end{aligned}$$

Applichiamo ora il lemma (B.2) in $I = [\tau_1, \tau_2]$ con:

$$v(t) = \|\phi(t; \tau, \xi) - \phi(t; \tau_0, \xi_0)\|, \quad c = \|\xi - \xi_0\| + M|\tau - \tau_0| \text{ e } u(t) = L.$$

Si ottiene, per ogni $t \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\|\phi(t; \tau, \xi) - \phi(t; \tau_0, \xi_0)\| \leq (\|\xi - \xi_0\| + M|\tau - \tau_0|) e^{L(\tau_2 - \tau_1)}.$$

La relazione precedente implica la tesi.

□

Si rimanda a [12] per approfondimenti sui teoremi qui dimostrati e per una teoria più completa sulle soluzioni del problema di Cauchy (B.2).

Bibliografia

- [1] S.Alekseenko, P.Kuibin, V.Okulov, S.Shtork, *Helical vortex in swirl flow*, J. Fluid Mech. **382** (1999), 195-243.
- [2] R.J.Arms, F.R.Hama, *Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring*, Phys. Fluids **8** (1965), 553-559.
- [3] H.Brezis, *Analisi funzionale*, Liguori Editore, 2002.
- [4] L.S.Da Rios, *Sul moto di un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque*, Rend. Circ. Mat. Palermo **22** (1906), 117-135.
- [5] H.Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), 477-480.
- [6] C.E.Kenig, G.Ponce, L.Vega, *On the interaction of nearly parallel vortex filaments*, Comm. Math. Phys **243** (2003), 471-483.
- [7] R.Klein, A.J.Majda, K.Damodaran *Simplified equations for the interaction of nearly parallel vortex filaments*, J. Fluid Mech. **288** (1995), 201-248.
- [8] A.J.Majda, A.L.Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).

-
- [9] K.Newton, *The N-vortex problem*, Springer, New York (2002).
 - [10] G.Ponce, *The interaction of almost parallel vortex filaments*, manoscritto.
 - [11] R.L.Ricca, *The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics*, Fluid Dynamics Research **18**, (1996), 245-268.
 - [12] S.Salsa, C.D.Pagani, *Analisi matematica Volume 2*, Masson, Milano (1991).