

1. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x \times \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} =$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} = \frac{2 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = 1.$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$
 $\stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}} = -\frac{1}{2}.$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+\tan x)}{x}} = e$, want
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{x} \stackrel{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan x} \times \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$

2. a) Voor continuïteit in $x = 0$ moet er gelden $\lim_{x \rightarrow 0} f_c(x) = f_c(0) = c$. Er geldt

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{3}{x}\right) \leq |x|,$$

dus volgt met de insluitstelling dat $\lim_{x \rightarrow 0} f_c(x) = 0 = c$.

- b) We nemen dus $f_c(0) = 0$. Voor differentieerbaarheid in $x = 0$ moet de limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_c(x) - f_c(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{3}{x}\right)$$

bestaan. Het is duidelijk dat dit niet het geval is (binnen iedere omgeving van 0 neem $\sin(\frac{3}{x})$ zowel de waarde 1 als de waarde -1 aan), dus $f_c(x)$ is niet differentieerbaar in $x = 0$.

3. Stel $y = y(x)$. Impliciet differentiëren van de vergelijking naar x levert

$$2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} - 3x^2y^2 - 2x^3y \frac{dy}{dx} = 0.$$

$x = -1$ en $y = 2$ invullen levert $-16 + 12 \frac{dy}{dx} - 12 + 4 \frac{dy}{dx} = 0$, dus $\frac{dy}{dx} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$. De vergelijking van de gevraagde raaklijn is dus

$$y = 2 + \frac{7}{4}(x + 1) = \frac{7}{4}x + \frac{15}{4}.$$

Z.O.Z.

4. Voor $x = 0$ is de stelling duidelijk. Voer in de functie $f(x) = \sqrt{1+x}$. Deze is continu op $[0, \infty)$ en differentieerbaar op $(0, \infty)$. Kies nu $x > 0$ willekeurig. Volgens de Middelwaardestelling is er een $c \in (0, x)$, waarvoor geldt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}.$$

Omdat $c > 0$ geldt $\frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2}$, zodat volgt

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2} \quad \text{en dus} \quad \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x.$$

5. We berekenen achtereenvolgens:

$$f(0) = 0, f'(x) = 1 + \frac{2}{1+2x}, \text{ dus } f'(0) = 3 \text{ en } f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2}, \text{ dus } f''(0) = -4.$$

$$\text{Dan volgt: } P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 = 3x - 2x^2.$$

6. Invullen van $y(x) = e^{rx}$ in de differentiaalvergelijking geeft de karakteristieke vergelijking $r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 + 1 = 0$. De oplossingen hiervan zijn $r_1 = -1 + i$ en $r_2 = -1 - i$, dus de algemene reële oplossing van de d.v. luidt:

$$y(x) = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x.$$

De beginvoorwaarde $y(0) = 1$ geeft $c_1 = 1$. Het berekenen van $y'(x)$ en het invullen van de beginvoorwaarde $y'(0) = 3$ geeft $-c_1 + c_2 = 3$, dus $c_2 = 4$. De oplossing van het beginwaardeprobleem luidt dus:

$$y(x) = e^{-x} \cos x + 4e^{-x} \sin x.$$

$$7. \quad \text{a)} \quad \int \frac{\sin(\pi \ln x)}{x} dx \stackrel{t=\ln x}{=} \int \sin(\pi t) dt = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi t) + C = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi \ln x) + C,$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - x - 2} dx &= \int 1 + \frac{3x - 3}{(x-2)(x+1)} dx = \\ x + \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1} dx &= x + \ln|x-2| + 2 \ln|x+1| + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int x^2 e^{-x} dx &\stackrel{p.i.}{=} -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx \stackrel{p.i.}{=} \\ -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + \int 2e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C. \end{aligned}$$