

Hertentamen Calculus 2, 13 juni 2007.

Opgave 1

a) $\int_0^\pi e^{\cos x} \sin x dx$

Neem $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$.

$$\int_0^\pi e^{\cos x} \sin x dx = \int_1^{-1} -e^u du = \int_{-1}^1 e^u du = e - \frac{1}{e}.$$

b) $\int \frac{2x+3}{(x+3)(x^2-2x+1)} dx$

Merk op, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Ansatz:

$$\int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} dx.$$

Vermenigvuldig de integrand met de noemer, en los op:

$$A(x-1)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x+3) = 2x+3.$$

Dit geeft $A = -3/16$, $B = 3/16$, $C = 5/4$. Dus

$$\int \frac{-3/16}{x+3} + \frac{3/16}{x-1} + \frac{5/4}{(x-1)^2} dx = -\frac{3}{16} \log|x+3| + \frac{3}{16} \log|x-1| - \frac{5}{4(x-1)} + C.$$

c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$

Gebruik $u = \frac{1}{x}$, $du = -\frac{1}{x^2} dx$. Verder

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} - \int_1^{1/t} \sqrt{1+u} du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{2}{3} (1+u)^{3/2} \Big|_1^{1/t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3/2} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Opgave 2

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \sin^4 n}{n^3 + n}.$

Voor absolute convergentie: Merk op dat $\sin x \in [-1, 1]$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus

$$\frac{\sin^4 n}{n^3 + n} \leq \frac{1}{n^3 + n} \leq \frac{1}{n^3}.$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ is een p -reeks met $p = 3$, dus convergent. Dus de oorspronkelijke reeks is absoluut convergent.

b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2 - \sqrt{n} - 2}.$

Deze reeks is zeker convergent, met behulp van de altenerende reeks test. Is hij ook absoluut convergent? Neem $b_n = 1/n^2$, een rij horend bij een absoluut convergente reeks. Dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - \sqrt{n} - 2} = 1.$$

Dus de limiet vergelijkingstest geeft nu dat $\sum a_n$ absoluut convergent is.

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\log n}}.$$

$1/n\sqrt{\log n}$ is een dalende positieve functie voor $n \geq 2$ met limiet 0, dus de reeks is op zijn minst convergent. Is hij ook absoluut convergent? Gebruik de integraaltest, met $u = \log x$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\log x}} dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \sqrt{u} \Big|_{\log 2}^{\infty} \rightarrow \infty.$$

Dus de reeks $\sum |a_n|$ divergeert, dus niet absoluut convergent.

Opgave 3

Gegeven

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+3)^n}{\sqrt{n}3^n}$$

Convergentieinterval bepalen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+3)^{n+1}}{\sqrt{n+1}3^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}3^n}{(x+3)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x+3}{3} \right| \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{|x+3|}{3}. \end{aligned}$$

Dus als $|x+3| < 3$ dan absolute convergentie, als $|x+3| > 3$, dan divergentie. Dus tot nu toe absolute convergentie in interval $x \in (-6, 0)$.

Als $x = 0$, dan reduceert de reeks tot

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dus is een convergente reeks, want $1/\sqrt{n}$ is een dalende positieve functie in n die nadert naar 0, en de reeks voldoet dus aan de alternerende reeksen test.

Als $x = -6$, dan reduceert de reeks tot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dit is een p -reeks, met $p = 1/2 < 1$, dus divergent.

Conclusie: de machtreeks convergeert voor $x \in (-6, 0]$.

Opgave 4

Bepaal $P_4(x)$, het vierde Taylor-polynoom, voor $f(x) = x \log(1+x)$, rond $x = 0$.

Hier zijn twee manieren mogelijk. De eerste gebruikt de standaard machtreeks voor $\log(1+x)$:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Vermenigvuldiging met x geeft

$$x \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n}.$$

Dus we vinden tot en met de vierde macht:

$$P_4(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}.$$

Een alternatieve manier is om de afgeleiden van $f(x)$ tot vierde orde uit te rekenen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log(x+1) + \frac{x}{x+1}, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}, & f''(0) &= 2, \\ f'''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}, & f'''(0) &= -3, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{6}{(x+1)^4}, & f^{(4)}(0) &= 8. \end{aligned}$$

Dus, met $f(0) = 0$ vinden we $P_4(x) = 0 + 0 + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{3}{3!}x^3 + \frac{8}{4!}x^4 = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$.

Opgave 5

Gegeven $f(x, y) = x^2y + 3xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$.

a) Bepaal de stationaire punten van f : bereken $f_x = \partial f / \partial x = 2xy + 3y - x - \frac{3}{2}$, en $f_y = \partial f / \partial y = x^2 + 3x$. De stationaire punten van f voldoen aan $f_x = f_y = 0$. Deze twee vergelijkingen tegelijk oplossen geeft $(x, y) = (0, -1/2)$ en $(x, y) = (-3, 1/2)$.

b) Bepaal of deze twee stationaire punten lokale maxima, lokale minima of zadelpunten zijn. Hiervoor bepalen we de matrix met tweede afgeleiden. $f_{xx} = 2y - 1$, $f_{xy} = f_{yx} = 2x + 3$, en $f_{yy} = 0$. Dus de determinant van deze matrix is $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -(2x + 3)^2$. Derhalve is deze voor $x = 0$ en voor $x = -3$ negatief, en zijn beide punten zadelpunten.

Opgave 6

a) Het gebied $R \subset \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $R := \{y \geq |x|, 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$. Bereken

$$\int \int_R x^2 y dA.$$

Teken eerst het gebied. Het valt op dat dit een kwart cirkel met straal drie is, waarbij de hoek θ loopt van $\frac{\pi}{4}$ tot $\frac{3\pi}{4}$. We schakelen dus over op poolcoördinaten, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Vergeet niet dat $dA = r dr d\theta$. Met deze voorbereidingen vinden we

$$\begin{aligned} \int \int_R x^2 y dA &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^3 r^2 \cos^2 \theta \, r \sin \theta \, r dr d\theta \\ &= [r^5/5]_0^3 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 243/5 \cdot -\frac{1}{3} [\cos^3 \theta]_{\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= 81/5 (\cos^3(\pi/4) - \cos^3(3\pi/4)) = 81/10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

b) Bereken

$$\int_2^4 \int_{y^2}^4 \cos(x\sqrt{x}) dx dy.$$

Deze integrand is niet zomaar te primitiveren. Maak een tekening van het gebied waarover geïntegreerd wordt en draai de integraalvolgorde om. We vinden dan

$$\begin{aligned} \int_2^4 \int_{y^2}^4 \cos(x\sqrt{x}) dx dy &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \cos(x\sqrt{x}) dy dx \\ &= \int_0^4 2\sqrt{x} \cos(x\sqrt{x}) dx \\ &= \frac{4}{3} [\sin(x\sqrt{x})]_0^4 = \frac{4}{3} \sin(8). \end{aligned}$$