15,5 m/s
Een konijn loopt 56 km/h.

15,8 m/s
Het snelste insect is een libelle met 57 km/h.

Het grote internationale **eurodiffusie-experiment**

Volgens de metingen op de website van het Eurodiffusieproject komt pas rond januari 2004 de helft van de munten in Nederlandse en Vlaamse portemonnees uit het buitenland. De eurodiffusie tijdens de zomervakantie is minder groot dan verwacht.

Op 1 januari 2002 introduceerde de Europese Bank de euro in Europa en was het voorbij met het wisselen van geld tussen de eurolanden. Voor ons vormde dat de start van een uniek experiment. Elk land heeft immers zijn eigen euro's. Nooit eerder was het mogelijk om de verspreiding van munten over de Europese grenzen te meten.

Na tien maanden meten is het tijd om de gemeten verspreiding van euromunten tegen het licht te houden. In het januarinummer kondigden we het al aan: maandelijkse metingen voor de zomervakantie en een septembermeting via de eurodiffusiewebsite moeten ons vertellen hoe snel munten uit diverse landen zich over Vlaanderen en Nederland verspreiden. We kunnen ook de oktobermeting nog meenemen voor deze analyse.

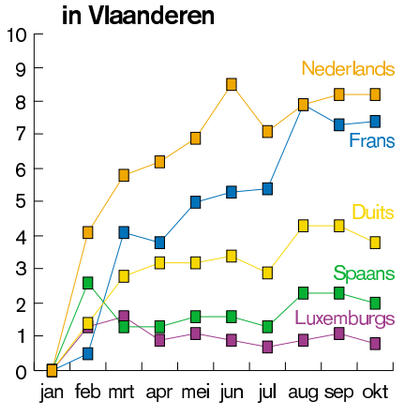
Meer dan vierduizend *EuroMeters* gaven zich op de website van het experiment op en telden regelmatig de munten in hun eigen portemonnee, of in de klas of kassa van de kantine. Dagelijks kwamen nieuwe metingen binnen op de website, en bij de maandelijkse grote metingen liep het aantal geregistreerde muntjes op tot vele tienduizenden per keer.

Over media-aandacht voor het experiment gedurende het afgelopen jaar hebben we niet te klagen. We haalden vele tientallen malen kranten, radio, tijdschriften en tv. Zelfs de *New York Times* ('Statisticians Count Euros and Find More Than Money') en diverse Europese media wijdden er een artikel aan.

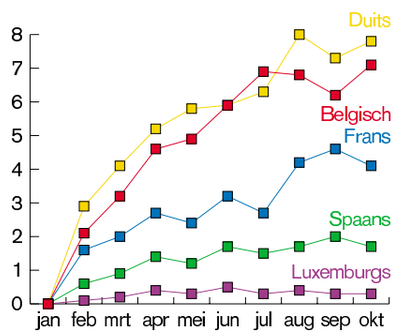
Welk model?

De muntverspreiding valt met uiteenlopende wiskundige modellen te beschrijven, maar welk model benadert de werkelijkheid het beste? We beschreven in januari een eenvoudig diffusiemodel. De plekken waar mensen munten in ontvangst nemen en weer uitgeven, zijn daarin bepalend voor de snelheid van de verspreiding, als een olievlek die op het water uitdijt. Tijdens de Studiegroep Wiskunde met de Industrie, dit voorjaar in Amsterdam gehouden, bogen acht

% Buitenlandse munten in Vlaanderen



% Buitenlandse munten in Nederland



ART Eurodiffusie 31-10-2002 16:21 Pagina 57

16,4 m/s
De snelheid van de gewone dolfijn *Delphinus delphis* bedraagt 59,2 km/h in de boeggolven van schepen (44,8 km/h in open water).

17 m/s
De snelste dinosauriër *Dromiceiomimus* liep 60 km/h.

Geertje Hek, Misja Nuyens, Harmen van der Ploeg, Bob Planqué en Erick Vermeulen

Munten stromen trager maar vliegen sneller

wiskundigen zich over uitgebreidere modellen voor de eurodiffusie. Zeer duidelijke trends konden de meetgegevens op de website toen nog niet tonen. Wel kon er nagedacht worden over hoe de verspreiding in theorie zou kunnen verlopen. In een week tijd ontwikkelden de wiskundigen twee modellen die de verspreiding van euromunten beschrijven.

Het *continue model* beschrijft de diffusie in geheel Europa, waarbij Europa is opgedeeld in een honderdtal gebieden en de diffusie zowel op kleine als grote afstanden plaatsvindt. Dit is een verfijning van het model dat we in het januarinummer beschreven. Het eenvoudigere *Markovmodel* gaat uit van een enkel land, en beschrijft dan de snelheid waarmee munten dat land verlaten en andere munten daar weer binnenkomen.

We kunnen de modellen nu toetsen aan de vele metingen die zijn ingevoerd. Als we een model hebben dat inderdaad strookt met de werkelijkheid, kunnen we betrouwbare voorspellingen geven. Velen vragen zich af wanneer de helft van de munten in de Lage Landen uit andere eurolanden komt, en hoe groot de verspreidingssnelheid is.

We kennen de begintoestand (in ieder land bevonden zich alleen de nationale euro's) en de eindtoestand, wanneer er een ideale menging heeft plaatsgevonden (in welk land je ook telt, overal verhouden de diverse euromunten zich hetzelfde). De uitgevoerde metingen vertellen ons iets over de tussenstanden.

EuroMeters

In de metingen op de website zien we de percentages buitenlandse munten uit vooral Duitsland, België/Nederland en Frankrijk gestaag toenemen. In Vlaanderen zijn er op dit moment zelfs meer Nederlandse munten dan in de eindtoestand van volmaakte vermenging, en vice versa. Bij munten die van verder weg komen en de Luxemburgse munten is het verzamelaarseffect een lastig punt. Nog steeds verkopen winkels prachtige verzamelmappen voor de munten van alle eurolanden. Verzamelaars die voor het eerst een Griekse eurocent of Ierse twee-euromunt tegenkomen, stoppen die meteen in hun map en halen daarmee de munt uit de roulatie. Mensen die van vakantie terugkomen, worden belaagd door buurkinderen en kennissen met de vraag of ze nog leuke munten in de portemonnee hebben.

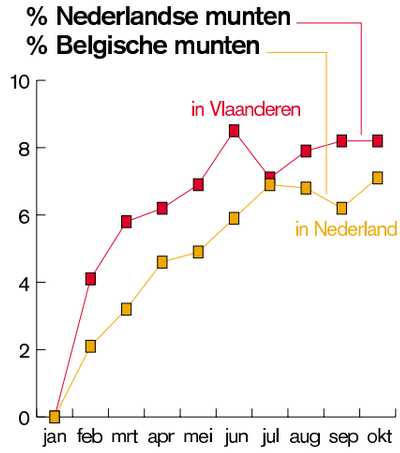
Dr Geertje Hek is universitair docent bij de vakgroep Dynamische systemen en numerieke analyse van de Universiteit van Amsterdam
Drs Misja Nuyens studeerde wiskunde in Amsterdam en is thans assistent in opleiding aan de Universiteit van Amsterdam op het gebied van de kansrekening.
Ir Harmen van der Ploeg is bezig aan zijn promotieonderzoek bij de vakgroep numerieke analyse en dynamische systemen van de Universiteit van Amsterdam.
Drs Bob Planqué werkt bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica aan zijn promotieonderzoek op het gebied van de mathematische biologie.
Drs Erick Vermeulen is redacteur van *Natuur & Techniek wetenschapsmagazine*

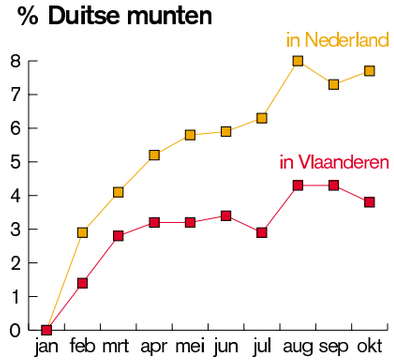
Bij de EuroMeters zorgen de schaarse muntjes ook voor een complicerende factor. Wie toevallig zo'n muntje in de portemonnee aantreft, kan daardoor besluiten om tussendoor een nieuwe meting toe te voegen aan de site. Dit vertekent het percentage gemeten buitenlandse munten, alhoewel het de verhoudingen tussen de vreemde munten niet verstoort. De samenvattingen van de metingen van de laatste dagen die de website buiten de grote metingen toont, en waarbij minder munten zijn geteld, laten daarom vaak een een iets groter aantal buitenlandse munten zien.

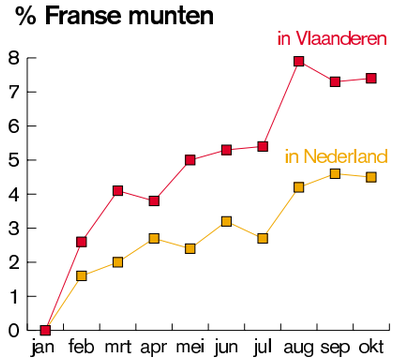
Bij een analyse van de meetgegevens kijken we daarom vooral naar de uitkomsten van de grote metingen. We hebben ervoor gezorgd dat van iedere EuroMeter maar één meting rondom de ijkdatum (de eerste van de maand) meetelde in het grote overzicht. Kijken we naar die metingen, dan zien we dat de aantallen munten uit Nederland en België en de omringende landen (Duitsland, Frankrijk) zo groot zijn dat we er inderdaad parameters uit de modellen mee kunnen schatten.

> 17,2 m/s
Bij stormachtige wind waait het minstens tien minuten met meer dan 62 km/h. Dat is 8 op de schaal van Beaufort.

18 m/s
De zwaardvis *Xiphius gladius* zwemt 64km/h.







Continue geldstromen

Diffusiemodellen gaan ervan uit dat munten zich verspreiden als gassen of, zoals we in het januarinummer beschreven, gekleurde vloeistoffen die zich mengen. Het continue-diffusiemodel dat wiskundigen begin dit jaar in Amsterdam bedachten, bevat twee processen. Het eerste is de verspreiding of diffusie van munten door mensen tijdens hun dagelijkse activiteiten: uitgaven in winkels, de markt, restaurants, bank, kantine enzovoort. Het tweede proces vindt niet lokaal plaats, maar over grotere afstanden. Daarin spelen truckers, toeristen en vliegtuigen een rol. Alhoewel in werkelijkheid het ene proces via een glijdende schaal overgaat in het andere, gaan de wiskundigen er bij dit model voor het gemak van uit dat er een duidelijke scheiding is.

Bij dit model hoort een kaart van de gezamenlijke eurolanden, die is verdeeld in kleinere gebieden met elk een paar miljoen inwoners. Een beperkt aantal gebieden bevat bovendien een vliegveld dat tevens geldverkeer met niet-buurlanden mogelijk maakt.

Ook al vormt het model een vereenvoudiging van de werkelijkheid, toch bestaat het uit pittige wiskundige vergelijkingen. Termen als de snelheid waarmee munten verdwijnen uit het betalingsverkeer, de dichtheid van geldbronnen (banken), de diffusiecoëfficiënt, de maat voor muntentransport over lange afstand: ze zitten er allemaal in. Een extra factor kan rekening houden met het feit dat het aantal munten dat per inwoner is geslagen per land varieert.

Bij de diffusiecoëfficiënt zijn ook enkele verfijningen mogelijk. Deze coëfficient is groter als de munten sneller reizen. Zo leggen mensen in dunbevolkte gebieden bijvoorbeeld gemiddeld grotere afstanden af bij het boodschappen doen. Een vereiste is dat het reizen de bevolkingsdichtheid in alle gebieden niet verandert.

Een demonstratie van het op een computer geprogrammeerde model tijdens de Studiegroep Wiskunde met de Industrie toont de waarde van de twee geprogrammeerde processen. Munten uit Ierland of Finland kunnen namelijk via de normale diffusie de andere landen niet bereiken. Als je aangeeft dat diffusie over langere afstanden, dus met name via het luchtverkeer, niet optreedt, dan blijven Ierse en Finse munten in hun land. Finse en Ierse munten dringen echter wel degelijk door in de portemonnees elders, zo blijkt uit de metingen, al gaat dat langzaam. Het totale aantal geslagen Finse en Ierse munten is natuurlijk ook gering.

Markovketen

Het tweede model is een zogenaamde Markovketen. De eurozone wordt hiervoor in gebieden verdeeld. Het ligt het meest voor de hand om ieder land als één gebied te nemen, maar omdat onze

ART Eurodiffusie 31-10-2002 16:21 Pagina 59

18 m/s
De snelheid van een zebra bedraagt 64 km/h.

18 m/s
De maximale snelheid die een fietser van 70 kg kan halen bij afdalen van een berg is 65 km/h.

TGV-factor

We zien in onze metingen verrassend hoogpercentage Franse munten in Nederland. Dat bewijst dat het transport over lange afstand – vakantiegangers, zakenmensen, truckers, vliegtuigreizigers – een grote rol speelt bij de euroverspreiding.

metingen alleen informatie geven over muntverkeer van en naar Nederland en Vlaanderen is dat niet uitvoerbaar. Hoe zouden we uit onze metingen ooit kunnen schatten hoeveel Franse munten er wekelijks naar Spanje gaan, of hoeveel munten de Ieren naar het Europese vasteland brengen?

Daarom kiezen we voor de simpelste benadering. Zowel voor Nederland als voor België (of voor Vlaanderen, want daar bevinden zich de vele Belgische EuroMeters) maken we een model waarin een munt zich in twee toestanden kan bevinden: hij is in het binnenland of hij is in het buitenland. We kunnen dan een zogenaamde overgangsmatrix maken, met daarin de kansen dat munten in één maand van toestand veranderen – dat wil zeggen dat ze de grens oversteken – of dat ze juist in dezelfde toestand blijven.

Deze matrix bevat vier getallen. Linksboven staat de kans dat een munt na een maand nog steeds in het land is, en linksonder de kans dat die munt naar het buitenland is gegaan. Rechtsboven staat de kans dat een munt uit het buitenland de grens oversteek, en rechtsonder de kans dat die munt in het buitenland blijft. Door deze matrix één keer met zichzelf te vermenigvuldigen (zie kader hiernaast) krijgen we dezelfde kansen, maar dan voor een periode van twee maanden. Nog een keer vermenigvuldigen geeft de kansen voor een periode van drie maanden enzovoort.

Markovketens en matrices

Stel je twee bakken (I en II) voor met in een van de bakken een sprinkhaan. Als hij in bak I zit, springt hij gedurende de dag naar bak II met kans 40%, en blijft hij met kans 60% in de bak zitten. Als hij blijft zitten, heeft hij de volgende dag weer 40% kans om van bak te veranderen, en 60% kans om te blijven zitten. We nemen aan dat wat er gedurende de tweede dag gebeurt niet afhangt van wat er daarvoor heeft plaatsgevonden. Als de sprinkhaan in bak II zit, verandert hij met een kans van 30% in een dag van bak, en blijft en met een kans van 70% zitten.

Met deze gegevens kunnen we de kans uitrekenen dat een sprinkhaan die in bak I zit, zich na twee dagen nog steeds in bak I bevindt. Dit kan op twee manieren gebeuren: de sprinkhaan kan twee dagen blijven zitten (kans 0,6 x 0,6), of twee keer van bak veranderen, namelijk van bak I naar II en terug (kans 0,4 x 0,3). Samen is dit 0,6 x 0,6 + 0,4 x 0,3 = 0,48.

Op dezelfde wijze kunnen we uitrekenen wat de kans is dat een sprinkhaan die in bak II zit twee dagen later weer (nog steeds) in bak II zit enzovoort. Hetzelfde kunnen we doen voor periodes van drie dagen, of tien, of duizend. De berekeningen worden dan echter behoorlijk lastig, en zonder systematische aanpak loopt de boel snel uit de hand.

Met een 'matrix', een wiskundig object, blijven deze berekeningen overzichtelijk. Een matrix geeft de 'overgangskansen' aan van een toestand naar een andere. In bovenstaand voorbeeld is dat:

$$\begin{array}{cc} & \text{VAN} \\ & \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \text{NAAR}\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array} = \text{M}$$

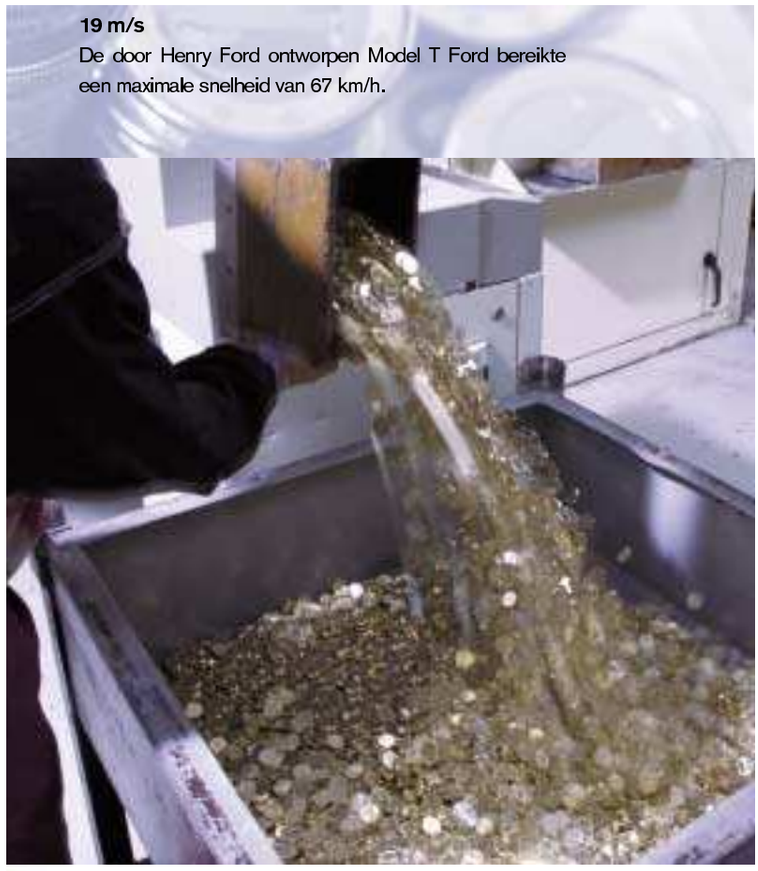
Als je nu de tweestaps-overgangskansen wilt weten, de overgangskansen die gelden voor een periode van twee dagen, dan kun je die vinden door deze matrix M op een bepaalde manier 'met zichzelf te vermenigvuldigen'. Dat werkt als volgt: voor het element linksboven, vermenigvuldigen we de getallen in de eerste rij met die in de eerste kolom, door het eerste getal (0,6) in de eerste rij met het eerste getal in de eerste kolom (0,6) te vermenigvuldigen, en op te tellen bij de vermenigvuldiging van het tweede getal in de eerste rij (0,3) met het tweede getal in de kolom rij (0,4). Voor het getal rechtsboven vermenigvuldigen we de eerste rij met de tweede kolom. Op dezelfde manier verkrijgen we de andere twee getallen.

De matrix met de tweestaps-overgangskansen ziet er dan zo uit:

$$\begin{array}{cc} & \text{VAN} \\ & \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \text{NAAR}\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}61 \end{pmatrix} \end{array} = \text{M}^2$$

Om de driestapsovergangskansen te berekenen, zou je de matrix M twee keer met zichzelf moeten vermenigvuldigen. Dit is echter hetzelfde als de tweestaps-overgangsmatrix met M te vermenigvuldigen. Op deze manier kunnen we de overgangskansen voor elk aantal tijdstappen berekenen.

ART Eurodiffusie 31-10-2002 16:21 Pagina 60



19 m/s
De door Henry Ford ontworpen Model T Ford bereikte een maximale snelheid van 67 km/h.

Als we bijvoorbeeld na twintig keer vermenigvuldigen linksboven ongeveer 0,5 zien staan, dan weten we dat de helft van de munten uit een bepaald land zich na twintig maanden in de andere landen bevindt. Dan is ook de helft van de munten in dat land van buitenlandse herkomst.

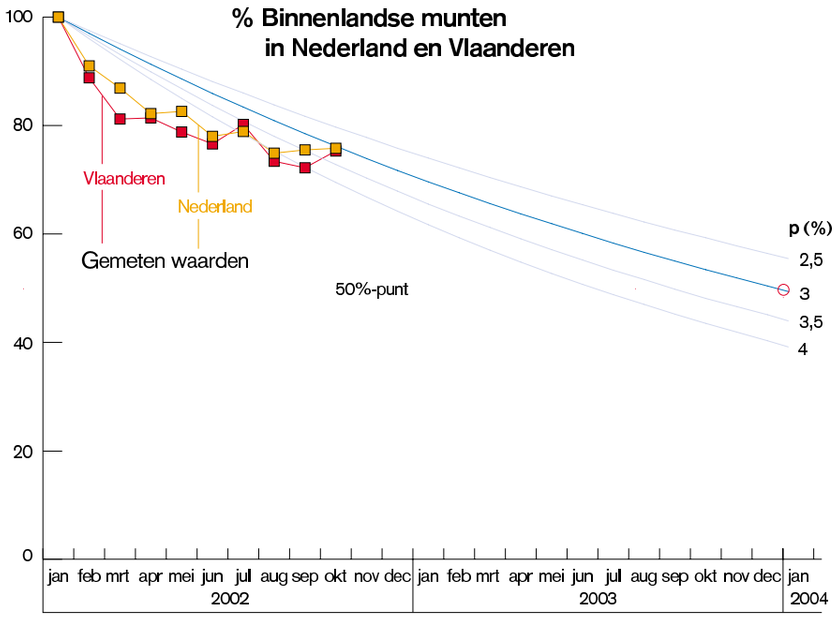
We kunnen het model uitbreiden door niet alleen verkeer van binnen- naar buitenland en omgekeerd mee te nemen, maar ook 'verkeer naar spaarpotten' en 'verkeer vanuit de banken'. Daarmee ontstaan ingewikkelder matrices, met langere rijen en kolommen.

Nadat iedereen eind 2001 de spaarpotten leegde en de inhoud naar de bank bracht, kon begin 2002 het vullen van de spaarvarkens opnieuw beginnen. Een deel van het muntgeld dat de banken in omloop brachten, verdwijnt hierdoor direct uit de roulatie. Dit vertraagt de diffusie, want de banken moeten nieuwe euro's – uit eigen land – in omloop brengen, terwijl de spaareuro's – waaronder buitenlandse – pas met flinke vertraging later weer in het betalingsverkeer verschijnen. Daarom beperken we ons hier tot het simpelere model.

ART Eurodiffusie 31-10-2002 16:21 Pagina 61

19,4 m/s
De maximale snelheid die een fietser van 100 kg kan halen bij afdalen van een berg is 70 km/h.

20 m/s
De snelheid van een eland is 72 km/h.



Voorspelling volgens het Markovmodel

De in februari geschatte diffusieparameter p van 4% per maand lijkt te hoog. Met behulp van de meetgegevens schatten we de diffusieparameter in het model voor Nederland en België nu allebei op 3%. We zullen dus tot januari 2004 moeten wachten voordat de helft van de lokale euro's uit het buitenland komt.

Voor het maken van een voorspelling met het Markovmodel moeten we de getallen in de matrix vinden. Hiervoor nemen we aan dat het aantal munten dat een land binnenkomt gelijk is aan het aantal munten dat dat land verlaat. Met gegevens van de website en de (bekende) verhoudingen tussen de aantallen euro's in binnen- en buitenland kunnen we de getallen in de matrix schatten.

De in februari geschatte diffusieparameter van 4% per maand lijkt ons gezien de EuroMetingen te hoog. Met behulp van de meetgegevens schatten we de diffusieparameter in het model, het getal linksonder in de matrix, voor Nederland en België nu allebei op 3%. Het omslagpunt, het tijdstip waarop er meer buitenlandse dan binnenlandse euro's zijn, bereiken we dan na 24 maanden. We zullen dus nog tot januari 2004 moeten wachten voordat de helft van de lokale euro's uit het buitenland komt.

Franse munten

Met het Markovmodel kunnen we voor zowel België als Nederland aangeven hoe snel de uitwisseling van munten met het buitenland plaatsvindt. We kunnen ook kijken naar de afzonderlijke buitenlandse munten. België en Nederland wisselen direct met elkaar munten uit, want ze delen immers een grens van 450 kilometer. Grensverkeer tussen Nederland en Duitsland, en tussen België en Duitsland zorgt ervoor dat de munten met adelaars, Brandenburger Tor en eikenbladeren in de Lage Landen belanden. Naar verwachting zullen Duitse munten uiteindelijk zo'n 35% van de munten in de portemonnees hier uitmaken, maar hun komst is trager dan die van de Alberts en Beatrixen in Nederland en België.

België grenst ook nog aan Luxemburg en Frankrijk. Het aantal Luxemburgse munten is erg klein en bedraagt in de metingen al snel meer dan bij uiteindelijke volledige menging het geval zal zijn. Vanwege de omvang van ons experiment bevinden de aantallen Luxemburgse munten zich echter in de marge.

De Franse munten komen wel in grotere aantallen in Nederland en België voor. Zouden alle munten zich verspreiden via lokale diffusie, dan bereiken de Franse munten met een flinke vertraging Nederland. Immers, als bijvoorbeeld in een maand drie procent van de munten in België de grens oversteekt en het percentage Franse munten daar vijf bedraagt, dan zou het aantal Franse munten in Nederland ongeveer 0,15% stijgen. Weinig munten zullen direct weer terugstromen of doorstromen naar Duitsland.

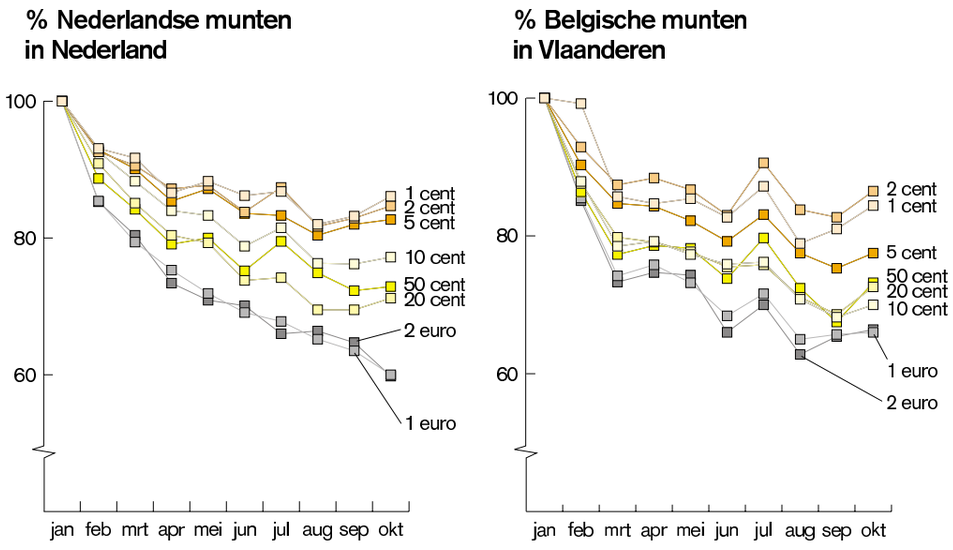
TGV-factor

We zien echter in onze metingen een veel hoger percentage Franse munten in Nederland. Dat bewijst dat het transport over lange afstand – vakantiegangers, zakenmensen, truckers, vliegtuigreizigers – een grote rol speelt bij de euroverspreiding. Hier treedt diffusie over lange afstand op, zoals beschreven in het continue model. Deze lange-afstandsvermenging geldt voor zowel België als Nederland. We kunnen het de TGV-factor noemen. Blijkbaar reizen door het ganse jaar zoveel mensen vanuit Nederland en Vlaanderen naar Parijs en andere Franse bestemmingen, dat ze zorgen voor een gestage export van Belgische en Nederlandse munten naar Frankrijk en import van Franse euromunten.

De Duitse munten vinden hun weg sneller naar Nederland dan naar België.

20 m/s
De snelste landvogel is de struisvogel *Struthio camelus* met 72 km/h.

20 m/s
De maximale snelheid bij het blootvoetschansspringen (dus zonder waterski's) is 72 km/h.



Grote munten reizen sneller

De grote euromunten (1 en 2 euro) reizen veel sneller dan de gele munten van 10, 20 en 50 cent; die van 1, 2 en 5 cent verspreiden zich nog trager.

Dit ligt vermoedelijk meer aan de transportmogelijkheden (snelwegen, treinen, geen gebergte) en de omvang van personenverkeer dan aan de langere grens (577 kilometer tegen 167 kilometer) tussen Nederland en Duitsland.

In februari is tijdens de Studiegroep Wiskunde met de Industrie geopperd dat de Markovketen in de zomervakantie 'harder' zou lopen: de vakantiemaanden juli en augustus zouden voor vier of zelfs vijf maanden tellen, in plaats van twee. De grafieken tonen na de vakantiemaanden geen opmerkelijke stijging van Griekse, Italiaanse en Spaanse munten. De vakantieversnelling blijkt bovendien nihil, en levert geen meetbare versnelling van de eurodiffusie. Zijn de meeste exotische munten eerst in de eurospaarmap verdwenen? Of is het aantal munten in ieders portemonnee maar een kleine fractie van het totaal aantal munten in omloop? Alleen die in de portemonnee worden immers verwisseld tijdens een reisje naar de Costa's.

In enkele gebieden gecentreerd rond een grote stad hebben EuroMeters zoveel munten geteld in alle maanden, dat we kunnen kijken naar de opmars van diverse buitenlandse muntsoorten in het afgelopen jaar. Zo zien we in Leuven dat de Franse munten het snelst verschijnen, terwijl in Antwerpen en Turnhout de Nederlandse sneller arriveren. Tussen Amsterdam en Utrecht zijn de verschillen niet zo groot, maar rondom Eindhoven verschijnen de Belgische euromunten – met een enigszins onregelmatig verloop – veel sneller dan andere buitenlandse euro's.

Langzame centen

Tot slot kunnen we uit al de metingen een verrassende tendens waarnemen. Alle EuroMeters vulden op de website van alle typen munten het aantal in. Als we kijken naar de munten uit het buitenland die in Vlaanderen en in Nederland zijn gemeten, dan blijkt dat de grote euromunten (1 en 2 euro) veel sneller reizen dan de gele munten van 10, 20 en 50 eurocent; de munten van 1, 2 en 5 eurocent verspreiden zich nog trager. Mogelijk komt rond de jaarwisseling de helft van alle 1- en 2-euro's al uit het buitenland.

Wie werkten mee aan het eurodiffusieproject

Het eurodiffusieproject was een initiatief van de redactie van *Natuur & Techniek wetenschapsmagazine* en de organisatoren van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2002, namelijk Geertje Hek, Misja Nuyens, Mark Peletier, Bob Planqué, Harmen van der Ploeg en Guido Terra. Die namen ook de bouw en het onderhoud van de website op zich, bijgestaan door Irene Driessen. Tijdens de bijeenkomst van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie in februari ontwikkelden de wiskundigen Piet van Blokland, Lorna Booth, Kirankumar Hiremath, Michiel Hochstenbach, Ger Koole, Sorin Pop, Marieke Quant en Djoko Wirosoetisno twee modellen voor de eurodiffusie. De enthousiaste inzet van vierduizend EuroMeters (waaronder veel schoolklassen) was uiteraard onontbeerlijk.