



# Het grote internationale eurodiffusie-experiment

De komst van de euro vormt een unieke gelegenheid voor een experiment. Welke processen staan er aan de basis van de verspreiding van munten over de eurolanden?

Erick Vermeulen en de  
Studiegroep Wiskunde met  
de industrie

Eindelijk is het zover. Na jaren van voorbereiding maken vanaf 1 januari 2002 de nationale munten in twaalf EU-landen en drie Europese dwergstaatjes ook fysiek plaats voor de euro. Daarmee hebben we de ingrediënten voor een prachtig experiment, dat we hierna nooit meer kunnen herhalen. Kunnen we wiskundig voorspellen hoe snel de munten van de diverse lidstaten zich verspreiden? Kunnen we aan de hand van peilingen het komende jaar conclusies trekken over het Europese geldverkeer?

We weten hoeveel munten in alle deelnemende landen worden verspreid. Terwijl alle eurobankbiljetten gelijk zijn, verschillen de munten echter van elkaar. Elk land heeft een eigen beeldzijde, en de munten met die nationale beeldzijde bevinden zich op 1 januari 2002 alleen in het eigen land. Hoe verspreiden die 65 miljard munten zich de komende jaren over Europa? *Natuur & Techniek wetenschapsmagazine* en de Studiegroep Wiskunde met de Industrie willen met uw medewerking een experiment opzetten.

## Portemonnees omkeren

We kunnen dit internationale eurodiffusie-experiment theoretisch en praktisch benaderen. De praktische kant houdt in dat we de komende maanden goed in onze portemonnee moeten turen. Een ideaal praktijkproefje voor wiskundelessen op school: tel elke maand alle muntjes in de portemonnees van leerlingen, en kijk hoeveel muntjes daarvan uit andere landen komen. De resultaten – inclusief een meting na de grote vakantie – kunnen we vervolgens gaan vergelijken met de theoretische verwachting.

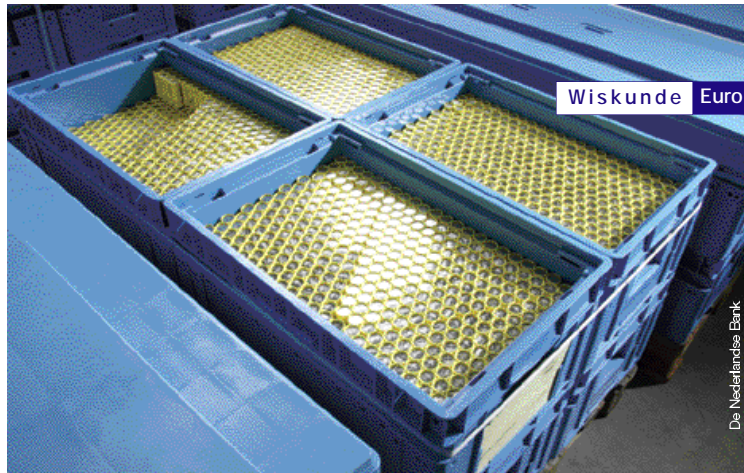
Die theoretische kant is namelijk een leuke vraag voor wiskundigen. Hoe kijken die naar dit unieke voorval? Kunnen we (wiskundig) voorspellen hoe snel munten uit Griekenland of Duitsland in onze portemonnees verschijnen?

Natuurlijk kun je verwachten dat uiteindelijk alle muntsoorten eerlijk verdeeld zijn over de Europese Unie. Het is alsof je die miljarden munten in een grote vergaarbak stopt (de eurolanden), flink schudt (betalen en wisselgeld ontvangen) en weer over alle inwoners verspreidt. Hoe lang duurt dit proces en welke factoren bepalen de verspreiding?

We weten in ieder geval hoeveel munten alle eurolanden in omloop brengen. Daarmee weten we ook hoe de uiteindelijke verdeling van munten in een portemonnee is. Circa een op de tien heeft een Nederlandse of Belgische beeldzijde, slechts een op de tienduizend komt uit Vaticaanstad. De gemiddelde geldtransactie heeft een waarde van circa twaalf euro. Dat betekent natuurlijk niet dat er voor twaalf euro aan munten van handen wisselt – een groot deel hiervan zal papiergeld zijn. Hoeveel munten worden dan uitgewisseld? Voor wie wil rekenen, kan het handig zijn om eens bij te houden hoe vaak de portemonnee op een dag wordt getrokken, en hoeveel muntjes per transactie de portemonnee verlaten en weer daarin belanden.

## Spelen met emmers

Een eerste poging om te voorspellen wat er gebeurt voordat de munten eerlijk verdeeld zijn, is een model van de landen en de hoeveelheid munten die elk land bij het begin heeft. Dit is de top-downbenadering. Voor het gemak



beschouwen we slechts twee landen, bijvoorbeeld Nederland en België. Allereerst is er de uitwisseling van munten tussen de twee landen: inwoners van Hasselt bezoeken de markt in Maastricht en jongeren uit Roosendaal gaan een avondje stappen in Antwerpen. Daarnaast komen er in beide landen munten binnen uit andere eurolanden en komen er andere munten van buiten. Voor elk tweetal landen kunnen we zo een formule afleiden die de onderlinge uitwisseling van munten beschrijft. Ook de munten die terugkomen, horen in zo'n vergelijking thuis. Een aparte factor vormt het verlies van munten: muntjes die daadwerkelijk in de put rollen, en de munten die inwoners van buiten het eurogebied mee naar huis nemen.

In hoeverre bepaalt in deze formule het grensgedrag de menging? Is de uitwisselingsnelheid van munten evenredig met de hoeveelheid grens die twee landen delen? Wiskundig gezien kun je dan voor de uitwisseling tussen twee bepaalde landen een constante definiëren.

Vooraf Griekenland, Finland en Portugal vormen buitenbeentjes, omdat ze weinig grenzen delen met andere EU-landen. Als diffusie in het grensgebied de verspreiding van muntjes over Europa bepaalt, dan is bijvoorbeeld de komst van Portugese euro's niet alleen afhankelijk van de diffusie van munten binnen Spanje, maar ook van het grensverkeer bij de Pyreneeën. Hoe meer grenzen een munt moet oversteken, des te langer duurt het dan voor hij in Nederland of België belandt. Kunnen we dat hier in de Lage Landen afleiden uit de snelheid waarmee munten uit die landen hier verschijnen?

## De bottum-up-benadering

Laten we ons Europa voorstellen als vele portemonnees die zich door mensen laten vervoeren en continu munten uitwisselen met hun omgeving. In deze 'bottum-up-benadering' benadering bekijken we de geldverspreiding dus niet vanuit de landen, maar vanuit de mensen.

Deze situatie lijkt op de Brownse beweging, die kleine deeltjes (Robert Brown zag het als eerste bij stuifmeel- of pollendeeltjes) uitvoeren door de warmte-energie van moleculen. Net als de pollen bewegen de portemonnees met muntinhoud zich ongericht, en door het uitwisselen van munten blijven er een paar munten achter terwijl de andere weer met de mens mee naar huis gaan.

Van een Brownse beweging weten we dat de verspreiding van deeltjes wordt gekenmerkt door een diffusiecoëfficiënt die je kunt berekenen als:

$$D = L^2 / (2T)$$

T is hierbij een tijdsduur en L de afstand die een deeltje gemiddeld in die tijdsduur heeft gereisd. Van deze formule weten we nog meer, namelijk dat D constant is. Als we T kiezen, kunnen we dus uitrekenen hoever een deeltje gemiddeld reist, namelijk:

$$L = \sqrt{2DT}$$

Omgekeerd kunnen we L kiezen en uitrekenen hoelang het duurt voordat we een deeltje daar kunnen verwachten:

$$T = L^2 / (2D)$$

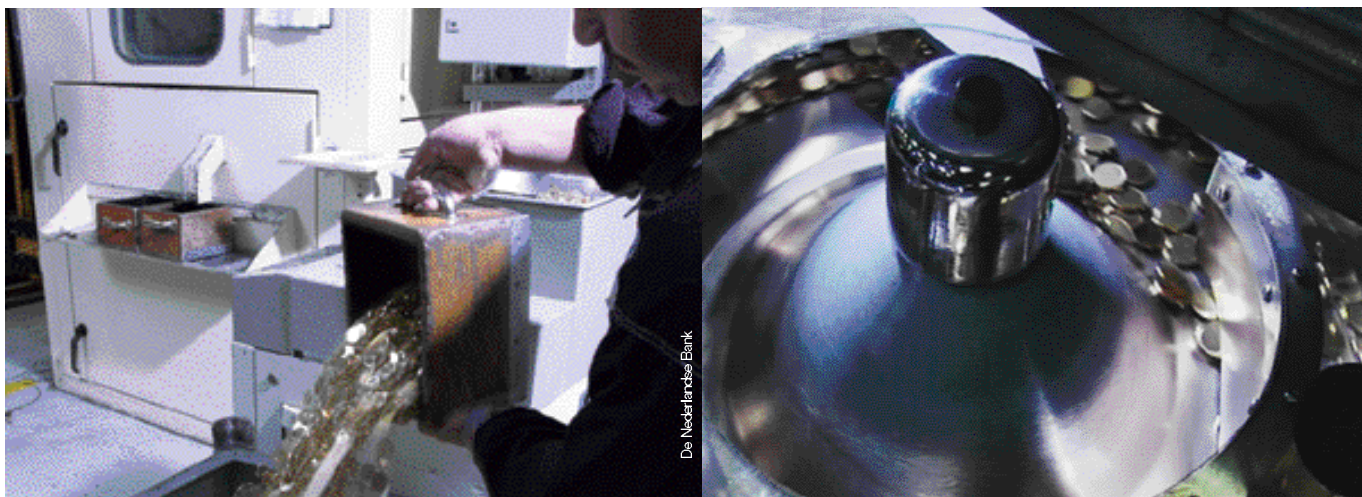
Als we stellen dat per dag een fractie Q van de muntvoorraad tussen mensen wordt uitgewisseld, en schatten hoe ver mensen gemiddeld per dag reizen, dan kunnen we de diffusiecoëfficiënt schatten. Bijvoorbeeld: Q ~ 0,1 per dag (ik wissel per dag een tiende van de munten in mijn portemonnee uit, ofwel T = 10 dagen) en L ~ 10 km (mensen reizen gemiddeld tot tien kilometer van huis), dan vinden we D ~ 5 km<sup>2</sup>/dag. In dat geval is een ergens uitgezette zak met munten gemiddeld na een dag over een cirkel met straal 10 ~ 3 kilometer verspreid. Dertig kilometer kost dan honderd dagen.

Dit resultaat betekent dat er niet zoveel lokale menging is en de snelle menging die je in de grensgebieden verwacht (door het winkelen in Maastricht of Luik en het uitgaan in Antwerpen) daar waarschijnlijk ook zal blijven.

### Dronkemanswandeling

Er zit natuurlijk een grote aanname in dit alles. We modelleren de mensen namelijk alsof ze een Brownse beweging uitvoeren: de mensen maken allemaal de dronkemanswandeling zoals Robert Brown die zag bij pollen onder de microscoop. Waarschijnlijk is het menselijk verspreidingsgedrag minder lukraak. Winkelcentra hebben bijvoorbeeld een onevenredige aantrekkingskracht in de wijde omgeving.





Waarschijnlijk verschijnen de eerste Portugese munten hier dankzij het vliegverkeer. Als de diffusie over land veel trager is dan de directe verspreiding via luchtwegen, vormen de eerste metingen van deze meer exotische euro's een aanwijzing voor de omvang waarmee muntgeld via het luchtverkeer andere landen bereikt.

Dit model heeft wel wat weg van twaalf emmers (de EU-landen) en drie vingerhoedjes (Vaticaanstad, San Marino en Monaco) met elk een andere kleur water. Met een maatlepel schep je water heen en weer tussen de emmers. De grootte van de afgemeten hoeveelheden vocht die steeds wordt overgescheept, hangt af van bepaalde aannamen die je maakt. Afhankelijk van de grootte van de hoeveelheden vocht die steeds van emmer wisselt, zal het korter of langer duren voordat alle oplossingen hetzelfde kleurtje hebben.

### Grensgedrag

Een tweede benadering is die van de lokale diffusie. De euromunten maken een soort Brownse beweging: ze bewegen zich lukraak alle kanten op en verspreiden zich zo. Ze gedragen zich als moleculen in een oplossing. In deze bottum-up-benadering kun je bijvoorbeeld nagaan hoe een enkel persoon de munten in zijn portemonnee verspreidt.

Wiskundig gezien beschrijf je dan hoe groot de kans is dat iemand die woont op een bepaalde plek op een andere plek geld uitgeeft. Daar wisselt hij een bepaalde fractie van de munten in zijn portemonnee uit met het muntgeld dat op die lokatie Y een bepaalde verdeling heeft. Elke lokatie in Nederland of Vlaanderen wordt dan gekenmerkt door

een vector met vijftien getallen (de vijftien nationale munten), die het totaal aantal munten per vierkante kilometer aangeeft.

Bij het spelen met emmers vroegen we ons al af of het grensgedrag de euro-menging bepaalt. Hoe snel beweegt het geld eigenlijk binnen landen? Blijft de menging tussen de munten van buurlanden gelokaliseerd in het grensgebied en dringen de munten verder van de grens af maar mondjesmaat door? Wellicht kunnen we een factor bedenken die de verspreiding van munten binnen ieder land zelf beschrijft. Deze spreidings- of diffusiefactor kan per land verschillen. Misschien bepaalt de afstand tussen grotere steden de diffusiesnelheid, waarbij kleinere afstanden tussen bevolkingscentra grotere menging inhoudt. Dan zou de diffusie in Nederland of Vlaanderen sneller gaan dan in Italië. Mogelijk kunnen we zelfs een verschil tussen de spreiding in Nederland en België waarnemen.

Andere invloeden zijn ook mogelijk. Bij Frankrijk kan het vele verkeer tussen die enorme hoofdstad Parijs en de andere gebieden een belangrijke factor vormen. Daarmee krijgen we dus een soort forensische component.

In hoeverre deze factoren een rol spelen, moet uit onze metingen kunnen blijken. Is de uitwisseling aan de grens snel en de diffusie in het land traag, dan hebben Maastricht en Hasselt zeer snel een goede menging van Nederlandse en Belgische munten. In Gent of Zeist kan het dan echter maanden duren voordat via de normale diffusie de eerste munten aankomen. Voor het trekken van conclusies hebben we dus betrouwbare metingen uit zowel grensgebieden als

uit centraal in een land gestegen plaatsen nodig. Het Rijnlands Lyceum in Wassenaar heeft zich al aangemeld voor ons experiment om ver van de grens betrouwbare metingen te verrichten.

### Meer ideeën

Nemen we de ideeën uit de verschillende modellen samen, dan zien we dat we met diverse processen te maken krijgen. Het *top-down* model beschrijft de lange-termijnmenging en het eindresultaat: volledige menging van de munten. De waarden van parameters die bij de diverse landen horen, zijn niettemin moeilijk te schatten. Mogelijk leveren onze metingen globale waarden die in dit model passen. Voordeel van deze methode is dat het transport van munten met vliegtuigpassagiers er een goede plaats in kan krijgen.

Kijken we naar de beschreven modellen voor diffusie van munten binnen een land, dan blijkt dat de situatie complexer is. Hoe snel beweegt een muntje door een land heen? Een Duitse euro die in Enschede belandt, kan wel eens jaren nodig hebben voordat iemand uit Breda hem kan uitgeven in Antwerpen.

Voor het gemak kan men ervan uitgaan dat mensen geen eurocenten oppotten voor het kaarten en dat het verdwijnen van muntjes een verwaarloosbare rol heeft. De uitwisseling van munten tussen landen kan dan op diverse manieren plaatsvinden. Allereerst is daar het gedrag aan de grenzen. Zeker met één munt vormt de grens geen barrière meer. We verwachten daarom dat aan weerszijden van de grens een snelle, normale diffusie plaatsvindt.

Ten tweede is er de factor toerisme: mensen die verder van de grens wonen,



en die een buurland of ander euroland bezoeken en daar geld uitgeven en geld ontvangen. Met name in de zomervakantie zal dat een belangrijke verspreiding van munten betekenen: ga ervan uit dat vrijwel alle meegenomen munten in bijvoorbeeld Barcelona worden uitgegeven, en dat het muntgeld dat terugkomt de dan heersende verdeling van munten in Barcelona weerspiegelt. Met name bij grote toeristische trekkers, zoals Amsterdam, Brussel of Parijs, zal er snel diffusie plaatsvinden. Een vergelijking van de portemonnees voor en na de grote vakantie zal aardige veranderingen moeten laten zien.

Deze toerismefactor is extra complex, omdat sommige mensen rechtstreeks vanuit het ene land met een vliegtuig naar een ander land reizen, terwijl anderen een route nemen die door drie, vier landen voert, onderweg etend en drinkend in gelegenheden langs de snelweg of in treinstations. Overigens vormen de kassa's in treinstations en luchthavens belangrijke centra voor vermenging.

#### Truckersfactor

Wat hierop lijkt en moeilijk te schatten is, is de truckersfactor. Duizenden vrachtwagenchauffeurs toeren door Europa en nuttigen in truckstops koffie en een uitsmijter. Misschien vormen zij wel de meest effectieve eurodiffusiefactor op langere afstanden, zeker als volgens de *bottom-up-benadering* de nationale diffusie van munten zeer traag verloopt. Binnen een week na 1 januari kan een enkele trucker al euromunten hebben uitgegeven in Duitsland, Spanje en Portugal. De truckstops en wegrestaurants vormen dan lokale eurodistributiecentra.

## Doe mee aan het grote internationale eurodiffusie-experiment

De Studiegroep Wiskunde met de Industrie organiseert een jaarlijks terugkerende themawEEK, waarin spannende en praktische problemen met wiskunde te lijf worden gegaan. De Studiegroep wordt in februari 2002 georganiseerd door het Centrum voor Wiskunde en Informatica en de Universiteit van Amsterdam. Wiskunde kan inzicht en overzicht bieden wanneer processen complex zijn. Ook het euro-experiment staat in februari op de agenda van de Studiegroep.

Voor de praktische uitvoering van dit spannende euro-experiment werken **Natuur & Techniek** en de Stu-

diegroep Wiskunde met de Industrie samen. In de loop van het jaar willen we metingen uitvoeren, in samenwerking met scholen, en in november doet **N&T** verslag van het experiment. Het Rijnlands Lyceum in Wassenaar heeft zich al bereid verklaard. Klassen en docenten uit Nederland en België die met dit unieke euro-experiment willen meedoen, kunnen zich aanmelden op [www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie](http://www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie). Zij krijgen dan een inlognaam en wachtwoord om hun klassikale tellingen in te voeren. We willen metingen uitvoeren op grofweg iedere eerste maandag van de maand, van februari tot en met juni en begin september.

De drie dwergstaatjes, San Marino, Monte Carlo en Vaticaanstad, leveren ook een aparte situatie. Zij brengen zeer kleine hoeveelheden munten in omloop. Nu is op zich het traceren van die zeldzame munten in de grote bulk van euro's een uitstekende methode om de grote stromen van munten op de lange termijn in kaart te brengen. Helaas maakt hun zeldzaamheid deze munten tot ongeschikte 'tracers'. Verzamelaars van munten halen deze snel uit roulatie,

zodat onduidelijk is voor hoeveel geldverspreiding een enkel muntje staat.

Zijn de prille modellen die we beschrijven geldend? Zijn er andere wiskundige modellen die de diffusie van de euro's beter beschrijven? Kunnen metingen uitsluitend bieden over de geschiktheid van modellen en de waarden van parameters zoals snelheid van geldverspreiding, geldvermenging in grenssteden en truckersfactor? We zijn benieuwd.

