De wiskunde achter de eurodiffusie

Misja Nuyens en Bob Planqué

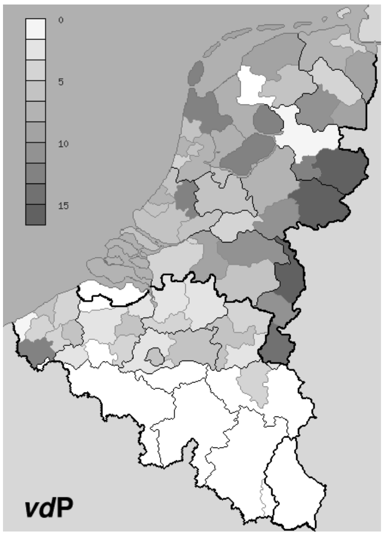
21 augustus 2003

1 Inleiding

Op 1 januari 2002 deed zich een uitzonderlijke situatie voor: in twaalf verschillende landen werd tegelijkertijd de euro ingevoerd. Elk land had euro's geslagen met een eigen nationale zijde. Dit stelde ons voor het eerst in staat om het betalingsverkeer met munten te analyseren. De begintoestand was immers volledig bekend en het is duidelijk waar elke munt vandaan komt. In totaal werden 65 miljard munten in omloop gebracht, waarvan 3,3 miljard Nederlandse.

Direct begonnen de munten zich te verspreiden over Europa; het proces van de 'eurodiffusie' was van start gegaan. Hoe lang zou het duren voordat de eerste Finse euro in Amsterdam op zou duiken? Gezien het relatief kleine percentage Nederlandse euromunten, hoe lang zou het duren voordat bijvoorbeeld de helft van de munten in Nederland van buitenlandse komaf zou zijn? Zouden alle soorten euromunten zich even snel verspreiden, of zouden we een verschil kunnen opmerken tussen bijvoorbeeld twee-euromunten en één-centstukken?

Een zestal wiskundigen uit Amsterdam (het Eurodiffusieteam) greep deze kans aan om een indruk te krijgen hoe de uitwisseling van munten in Nederland en daarbuiten geschiedt. Een website (`http://www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie`) werd geopend waarop zogenaamde EuroMeters konden opgeven welke munten ze in hun portemonnee hadden. Ruim tweehonderdvijftig schoolklassen voerden zo ook maandelijks een gezamenlijke meting in. Daarnaast werd tijdens de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2002 een poging gedaan om een wiskundige beschrijving te geven van de verspreiding van de euro's. In dit stuk wordt een indruk gegeven van drie wiskundige modellen waarmee de eurodiffusie beschreven zou kunnen worden. Hierbij wordt gebruik gemaakt van twee verschillende

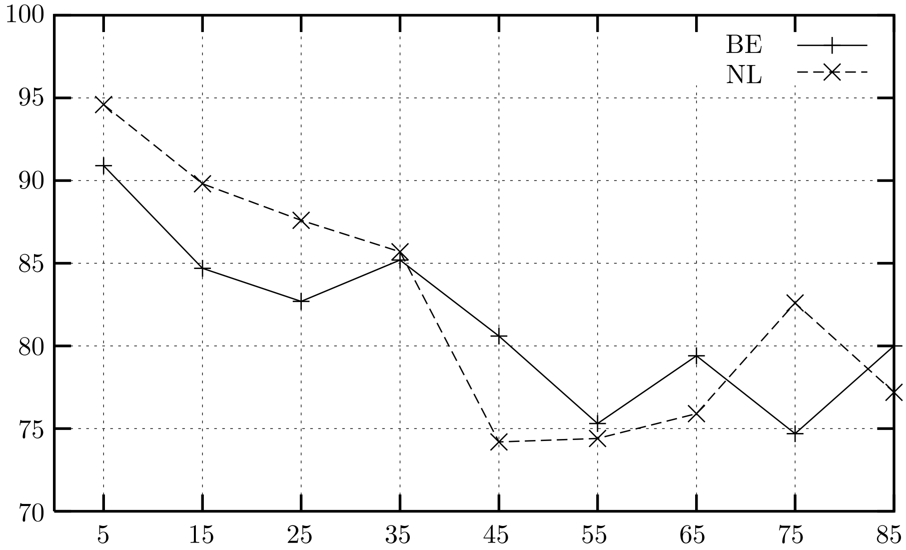


Figuur 1: Percentage Duitse munten op 1 februari 2003

wiskundige technieken, namelijk partiële differentiaalvergelijkingen en Markovketens. Het doel van deze exercitie is niet zozeer om uitgebreid in te gaan op één specifiek wiskundig model, maar meer om een indruk te krijgen hoe we een keuze kunnen maken tussen de mogelijke invalshoeken bij het modelleren. De realistische toepassing van een model is vaak zeer afhankelijk van de beschikbare meetgegevens. Het wiskundig modelleren van de verspreiding van munten is hierop geen uitzondering. Zodoende geven we nu eerst een kort overzicht van de beschikbare data die de EuroMeters ons via de website hebben verschaft.

2 De meetgegevens

De vele EuroMeters die zich vrijwillig hadden opgegeven konden de inhoud van hun portemenee op ieder moment invoeren. Men werd verzocht om dit in ieder geval ook aan het begin van elke maand te doen. Deze Grote EuroMetingen vormen het meest betrouwbare overzicht van de toestand van de muntenpolulatie in Nederland en België. In één zo'n meting werden soms tot wel 70.000 munten ingevoerd. Niettemin zien we grote fluctuaties in het verloop van de diffusie. Figuur 2 laat de percentages vaderlandse euromunten zien in Nederland en België tijdens de eerste 85 dagen. Hoewel een gestage afname waar te nemen is—zoals verwacht—zijn de nodige pieken en dalen te zien. Een mogelijke verklaring voor



Figuur 2: Percentage vaderlande munten in Nederland en België in de eerste 85 dagen.

deze schommelingen is dat de EuroMeters geen aselecte groep mensen vormen. Bovendien is het niet uit te sluiten dat sommige Meters juist munten hebben opgegeven op het moment dat ze een buitenlandse euro in hun portemonee hebben gevonden. Het is immers veel spannender om een Finse munt in te voeren, dan een handvol Nederlandse. Hoe sterk deze storende invloeden zijn is niet duidelijk, maar het geeft wel aan dat we de data niet altijd volkomen serieus kunnen nemen. Dit heeft zijn weerslag in de toepasbaarheid van de modellen.

3 Continue modellen

De verspreiding van euro's over Europa is het gevolg van vele verschillende processen. Mensen gaan op vakantie en geven de munten in hun portemonee uit in het land van bestemming, centrale banken geven nieuw geld uit, mensen potten geld op of raken het kwijt in afvoerputjes. Maar misschien wel het belangrijkste proces is het dagelijks uitwisselen van muntjes bij de buurtsuper en op de markt.

Er zijn zoals we al aangaven verschillende soorten modellen die we zouden kunnen gebruiken om de eurodiffusie beter te begrijpen en voorspellen. Eén scheiding die we kunnen aanbrengen tussen deze modellen is hun nadruk op korte- of lange-afstandsprocessen. In deze paragraaf geven we een korte indruk van het soort modellen dat juist het lokale muntenverkeer als uitgangspunt neemt. Ze worden gemaakt d.m.v. zogenaamde diffusievergelijkingen, een belangrijke klasse van (partiële) differentiaalvergelijkingen (PDV's).

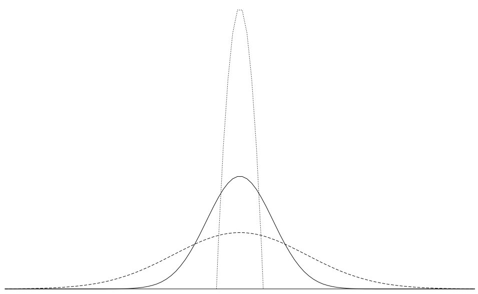
Het klassieke voorbeeld van een diffusieproces is dat van het mengen van twee soorten gas. Elk molecuul beweegt zich volgens een stochastische wandeling, onafhankelijk van de omringende moleculen. Kenmerkend voor diffusie is dat de gassen zich mengen totdat de concentraties van beide gassen overal hetzelfde zijn.

Een (mogelijk) nadeel van deze continue processen is het volgende: als we beginnen met een druppel rode vloeistof in een bad met water, dan voorspelt de theorie dat op elk willekeurig tijdstip na aanvang er *overal* een klein beetje rode vloeistof zal zijn gekomen (zie Figuur 3). Deze minieme hoeveelheden zijn echter voor veel toepassingen verwaarloosbaar.

Doordat er zoveel verschillende processen aan de gang zijn bij het verspreiden van de euro's is er een heel scala aan mogelijke modellen die met behulp van PDV's kunnen worden gemaakt. Bijvoorbeeld:

1. We kunnen aannemen dat er een duidelijke scheiding bestaat tussen verspreiding van munten op korte afstand en over langere afstand (de bakker vs. het vliegveld). In werkelijkheid zullen munten natuurlijk over allerlei afstanden worden uitgewisseld, maar een tweedeling is wellicht een aardige benadering.

2. We zouden plaatsafhankelijke effecten kunnen opnemen. Zo zal er bijvoorbeeld in steden meer diffusie plaatsvinden dan op platteland, simpelweg



Figuur 3: Een begrensde piek verliest zijn scherpe randen direct na aanvang van de diffusie en verspreidt zich uiteindelijk homogeen over heel $\mathbb{R}$.

omdat er meer mensen zijn.

3. Voor gewone diffusieprocessen bestaat er geen goedgedefinieerde grens tot waar de diffusie op een bepaald tijdstip is gekomen. Dit is wellicht onwenselijk. We zouden dan kunnen kiezen voor een vergelijking die de verspreiding van euro's beschrijft op een manier die overeenkomt met het zich uitspreiden van een olievlek. Die houdt zulke randen wel intact.

4. We kunnen er tot slot voor kiezen of we aannemen dat de invoering van nieuwe munten door de centrale banken en het verlies van munten uit de roulatie verwaarloosbaar is.

Helaas is het niet goed mogelijk om een wijze keuze te maken uit bovenstaand rijtje: de hoeveelheid beschikbare data is te klein en te onbetrouwbaar. We beperken ons nu dan ook tot een relatief eenvoudige keuze.

Voorbeeld-model:

$$\frac{\partial}{\partial t}m(x,t) = D\nabla^2 m(x,t) + \int_\Omega K(x,z,t)m(z,t)dz.$$

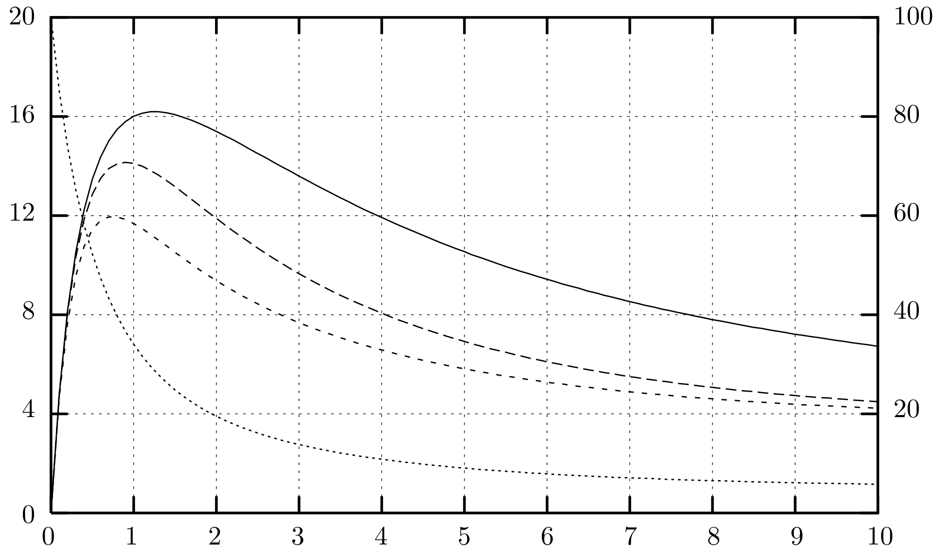
Hier is $m(x,t)$ de hoeveelheid munten op plaats x en tijd t, D de diffusieconstante, Ω het gebied waar het proces plaatsvindt (de Euro-zone) en K een zogenaamde intregraalkern voor het modelleren van lange-afstandsverspreiding van munten. In K zouden we bijvoorbeeld het volgende scenario kunnen opnemen. Reizigers verplaatsen zich van plaats x naar z met een zekere kans, en nemen dan een aantal munten mee van huis. Afhankelijk van hoe de munten op plaats z verdeeld zijn, worden meer of minder munten uitgewisseld. Verder nemen we aan dat er diffusie overal even snel plaatsvindt, dus het verschil tussen stad en platteland is gemakshalve onder het tapijt geschoven. Ook wordt aangenomen dat er geen munten kwijtraken of opgepot worden en dat er nieuwe munten worden ingevoerd. K heeft onder deze aannamen dan de volgende vorm:

$$K(x,z,t)m(z,t) = f(x,z,t) + f(z,x,t),$$

waar

$$f(x,z,t) = \epsilon p(x,z,t)\rho[m(z,t) - m(x,t)].$$

Hier is ϵ een maat voor het aantal munten dat men in het bezit heeft en uitwisseld, $p(x,z,t)$ is de kans dat een persoon uit plaats x zich in z bevindt op tijd t en ρ is de bevolkingsdichtheid.



Figuur 4: Percentage Nederlandse (fijnst gestippeld, schaal rechts) en Belgische munten (schaal links) in Nederland in de eerste 10 maanden voor verschillende parameterwaarden voor $\epsilon\rho/D$.

Aangezien we zeer weinig gegevens hebben die ons helpen enkele van de parameters te schatten, laat Figuur 4 de grafieken zien voor enkele keuzes van parameters.

In deze grafiek is te zien hoe het aantal Nederlandse munten in ons land monotoon daalt in de tijd. Het aantal Belgische munten stijgt eerst doordat er in het begin nog veel Belgische munten in de buurt van Nederland zijn. Na een tijdje zijn de munten echter verder uitgespreid en daalt ook het aandeel Belgische munten tot een paar procent.

We merken nog op dat het lange-termijngedrag voor alle modellen die we hebben voorgesteld hetzelfde is: aangezien geen van de modellen een mechanisme bevat dat de munten weer scheidt is voor alle modellen de voorspelling dat in Nederland op de lange duur nog maar 5% van de munten van Nederlandse oorsprong is.

Continue modellen zijn een intuïtief voor de hand liggende optie om de eurodiffusie te modelleren. We moeten echter concluderen dat ze door de complexiteit van de werkelijkheid en het gebrek aan goede meetgegevens maar beperkt inzetbaar zijn.

4 Discrete modellen

Een andere manier om de diffusie van de euromunten te modelleren is de volgende. We maken een kans(rekening)model dat het gedrag van een munt beschrijft. Het gedrag van deze ene munt wordt door het gebruik van de zogenaamde *Wet van de grote aantallen* als volgt geëxtrapoleerd naar het gedrag van de totale populatie van munten: als de munt van 200 dagen met kans 1/8 van Nederland van Spanje verhuist, zal ruwweg 1/8 deel van alle Nederlandse munten na 200 dagen zich in Spanje bevinden.
Voor de ene munt bouwen we een Markov-keten. Als mogelijke toestanden nemen we de twaalf landen. We kunnen dan een overgangsmatrix M opstellen die aangeeft hoe waarschijnlijk het is dat de munt zich in een tijdsstap - bijvoorbeeld een maand - naar land j verhuist, als hij zich in land i bevond. Als we de overgangsmatrix M n keer met zichzelf vermenigvuldigen, krijgen we de n-staps-overgangskansen. Als we de matrix maar met zichzelf blijven vermenigvuldigen, ontstaan er langzaam maar zeker overal dezelfde rijen en komen we dichter en dichter bij de evenwichtstoestand. In het geval van de euromunten is de evenwichtstoestand de totale vermenging van alle munten uit alle landen.

Dit betekent dat in elk van de eurolanden de concentraties Duitse, Spaanse en Italiaanse munten hetzelfde zijn.

Uitbreidingen van het model zijn mogelijk. We kunnen een extra toestand invoeren voor munten die kwijtraken doordat ze verdwijnen in afvoerpuntjes of door een Peruaanse mee worden genomen naar Zuid-Amerika. Tegenover deze put kunnen we ook een bron plaatsen: de DNB brengt elk jaar een aantal nieuwe munten in omloop. Deze zijn afkomstig van een extra toestand die we in het model kunnen creëren.

De getallen in de hierboven beschreven overgangsmatrix zijn echter onbekend. Het enige gegeven dat de ingevoerde metingen op de webpagina opleveren is het percentage buitenlandse munten in de populatie van munten die in Nederland aanwezig zijn. We besluiten daarom het mooie, uitgebreide model hierboven te laten voor wat het is en een simpelere Markov-keten te bekijken.

5 De praktijk: een simpel(er) model

De meetgegevens geven ons alleen informatie over het percentage buitenlandse munten in Nederland. Dit zijn de enige gegevens die we mogen gebruiken. De simpele(re) Markov-keten die we gaan gebruiken om voorspellingen te doen voor het verloop van de eurodiffusie kent daarom slechts twee toestanden: Nederland en Buitenland. De overgangsmatrix bevat vier getallen. Noem p de kans dat een munt die nu in Nederland is een tijdsstap later in het buitenland is.

Als we aannemen dat evenveel euromunten ons land binnenkomen als verlaten, is het percentage buitenlandse munten in Nederland even groot als het percentage Nederlandse euromunten dat inmiddels haar heil heeft gezocht in het buitenland. Dit percentage na een maand hebben we hierboven p genoemd. In onze matrix M staat p rechtsboven, en $1-p$ linksboven. Volgens de gegevens zijn er twintig keer zoveel buitenlandse als Nederlandse euromunten. Als van alle munten in Nederland een gedeelte van grootte p in een tijdsstap de grens oversteekt, moet van alle munten in het buitenland een gedeelte $p/20$ naar Nederland komen om het evenwicht te bewaren. Een gedeelte van $1-p/20$ zal (nog) in het buitenland blijven. We hebben nu de volgende vorm van de overgangsmatrix M afgeleid:

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p/20 & 1-p/20 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Rest ons nog om een goede waarde voor p te vinden!

Om uit de meetgegevens een waarde van p af te leiden, hebben we informatie nodig over de invloed van p op het gedrag van het proces. In het bijzonder willen we weten hoe p de n-staps-overgangskansen beïnvloedt. De volgende stelling geeft een antwoord op deze vraag.

Stelling *Laat de matrix M zijn als in (1). Dan geldt dat de n-staps-overgangskansen p_n van Nederland naar het buitenland monotoon stijgen in p als $0 < p < 20/21$, maar altijd kleiner zijn dan $20/21$.*

Bewijs We bewijzen deze stelling met inductie: we laten zien dat de stelling waar is voor $n = 1$, en vervolgens dat als de stelling waar is voor een bepaalde $m \in \mathbb{N}$, deze ook waar is voor $m + 1$. Op deze manier hebben we laten zien dat de stelling geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Het geval $n = 1$ is eenvoudig te zien: $p_1 = p$ en stijgt als p stijgt. Bovendien geldt $p_1 < 20/21$ vanwege de aanname.
Neem nu aan dat p_m monotoon stijgend is in p en kleiner is dan $20/21$. Dit noemen we de inductiehypothese. Dan moeten we laten zien dat ook p_{m+1} stijgend is p, en kleiner dan $20/21$. De $m+1$-staps-overgangskans wordt gegeven door

$$p_{m+1} = p(1 - p_m) + p_m(1 - p/20) = p + p_m(1 - \frac{21}{20}p). \tag{2}$$

Om te laten zien dat p_{m+1} stijgt in p, berekenen we de afgeleide naar p en laten zien dat deze (onder de voorwaarde!) positief is:

$$\frac{dp_{m+1}}{dp} = \frac{d}{dp}\Big(p + p_m(1 - \frac{21}{20}p)\Big) = 1 + (1 - \frac{21}{20}p)\frac{dp_m}{dp} - \frac{21}{20}p_m.$$

Vanwege de aanname $p < 20/21$ en de inductiehypothese geldt dat

$$(1 - \frac{21}{20}p)\frac{dp_m}{dp} > 0.$$

Dus

$$\frac{dp_{m+1}}{dp} > 1 - \frac{21}{20}p_m > 0$$

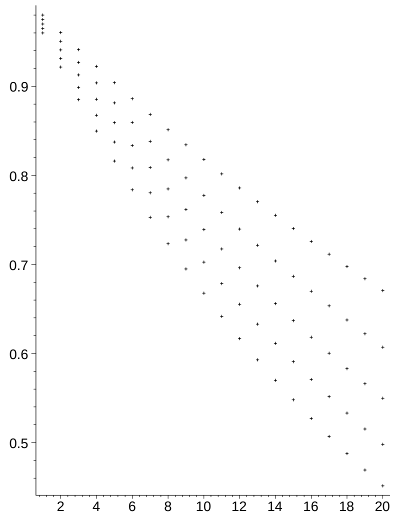
vanwege het tweede deel van de inductiehypothese. Daar p_{m+1} monotoon stijgt in p, kunnen we $p = 20/21$ invullen in (2) en krijgen we

$$p_{m+1} = p + p_m(1 - \frac{21}{20}p) < 20/21.$$

Hiermee is het bewijs voltooid. QED

6 Voorspellingen

Voor het doen van voorspellingen is de waarde van p nodig. Om p te vinden zouden we simpelweg kunnen kijken naar het percentage buitenlandse munten in Nederland na één maand. Echter, als we gegevens van de rest van het jaar gebruiken, zullen we waarschijnlijk een nauwkeurigere schatting krijgen. Hoe we dat doen zullen we nu uitleggen.
Eerst merken we op dat het percentage buitenlandse munten na bijvoorbeeld acht maanden de 8-staps-overgangskans p_8 is. Deze kans kunnen we in Figuur 5 tekenen. We vinden dan twee andere 8-staps-overgangskansen waar hij tussen ligt, met twee bijbehorende waarden voor p.



Figuur 5: Percentage buitenlandse munten na $n = 1, \ldots, 20$ maanden voor $p = 0.04 - 0.035 - 0.03 - 0.025 - 0.02$.

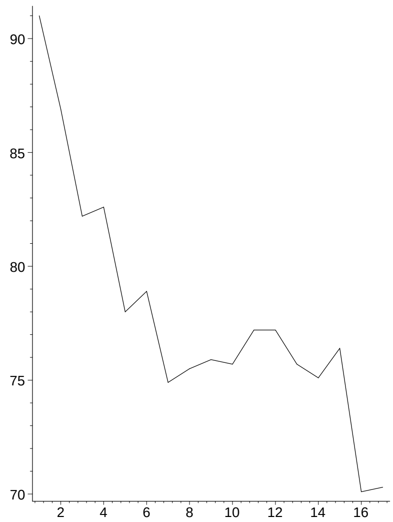
De stelling hierboven zegt dan dat alle andere 8-staps-overgangskansen groter of kleiner zijn. De twee gevonden waarden voor p leveren zodoende een model op dat de gegevens het beste benadert (voor $n = 8$).

Om het percentage buitenlandse euromunten op een bepaald tijdstip in de toekomst te voorspellen, hoeven we nu alleen maar de curve die hoort bij de gevonden waarde(n) van p 'af te lopen' tot we bij dat tijdstip zijn.

7 Resultaten en conclusie

De eerste maanden schatte het Eurodiffusieteam de waarde van de parameter p in het model hierboven op 0.04. Zoals uit Figuur 5 valt af te leiden zou dat betekenen dat rond juni 2003 *het omslagpunt* zou zijn bereikt: evenveel buitenlandse als Nederlandse euro's in ons land.

Deze voorspelling bleek echter aan de vroege kant, zoals te zien is in Figuur 6.



Figuur 6: Percentage Nederlandse euromunten in omloop in Nederland als functie van het aantal maanden sinds 1 januari 2002.

Na de zomervakantie werd de waarde van p door het Eurodiffusieteam *verlaagd* tot 0.03, maar ook deze schatting lijkt onjuist. Op dit moment schatten we p op 'slechts' 0.02.
Hierbij zij opgemerkt dat elk muntstuk eigenlijk zijn eigen p-waarde heeft: munten van twee euro blijken veel sneller te reizen dan die van één cent. (Kunt u verklaren waarom?) Het omslagpunt voor twee-eurostukken zal dan ook veel

eerder komen dan dat voor één-centstukken.

De voornaamste les die we kunnen trekken uit dit experiment is dat wiskundig modelleren van een fenomeen zoals de eurodiffusie vaak een munt met twee kanten is: aan de ene kant is het wenselijk om zoveel mogelijk processen realistisch te beschrijven, maar aan de andere kant wordt je beperkt door de beschikbare meetgegevens.
Zo is het in de huidige opzet nog niet mogelijk gebleken om met een (eenvoudig) model de vreemde stagnatie van de verspreiding, zie Figuur 6, te verklaren. Ook de toevoeging van een bron (DNB) en een put (spaarpotten en niet-EU toeristen) aan het model biedt geen uitkomst.
Of het simpele model van paragraaf 5 op de lange termijn - wanneer alle mappen van muntenspaarders vol zijn - beter werkt, zullen we over een paar jaar weten...

8 Referenties

- Geertje Hek, Misja Nuyens, Harmen van der Ploeg, Bob Planqué, Erick Vermeulen, *Het grote internationale eurodiffusie-experiment*, Natuur & Techniek **11** (2002) p.56-62.
- Erick Vermeulen en de Studiegroep Wiskunde met de Industrie, *Het grote internationale eurodiffusie-experiment*, Natuur & Techniek **01** (2002) p.11 and 22-25.
- `http://www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie`: site van het Eurodiffusie-project in 2002
- `http://www.eurodiffusie.nl`: site van het Eurodiffusieproject in 2003
- K. van Harn en P.J. Holewijn, *Markov-ketens in diskrete tijd,* Epsilon Uitgaven, 1991