

Opgave 1. Beschouw de uitbreiding van de modale basistaal met een nieuwe modale operator ‘!’, waarvan de semantiek is gegeven door:

$$\mathcal{M}, s \Vdash !\varphi \iff \mathcal{M}, s \Vdash \varphi \text{ en er is geen } t \neq s \text{ zodat } \mathcal{M}, t \Vdash \varphi.$$

Beschouw verder de frames $\mathcal{F} = \langle \{e, o\}, R \rangle$ met $R = \{\langle e, o \rangle, \langle o, e \rangle\}$, en $\mathcal{G} = \langle \mathbb{N}, S \rangle$ met $S = \{\langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$, en laat $\psi = (!p) \rightarrow \Box(\Diamond p \rightarrow p)$.

(a) Bewijs of weerleg de geldigheid van ψ in $\mathcal{F}$.

We laten zien dat ψ niet geldig is in $\mathcal{F}$. Beschouw een valuatie π op $\mathcal{F}$ zodat $\pi(e)(p) = 1$ en $\pi(o)(p) = 0$. Laat $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \pi \rangle$. Dan geldt $\mathcal{M}, e \Vdash !p$. Ook vinden we $\mathcal{M}, o \Vdash \Diamond p$ vanwege $\langle o, e \rangle \in R$, maar $\mathcal{M}, o \nVdash p$ en dus $\mathcal{M}, o \nVdash \Diamond p \rightarrow p$. Daarmee volgt uit $\langle e, o \rangle \in R$ dat $\mathcal{M}, e \nVdash \Box(\Diamond p \rightarrow p)$ en dus $\mathcal{M}, e \nVdash \psi$. We hebben dus een model $\mathcal{M}$ op $\mathcal{F}$ gevonden zodat in een bepaald punt van $\mathcal{F}$ de formule ψ niet waar is. Dat betekent $\mathcal{F} \nVdash \psi$.

(b) Bewijs of weerleg de geldigheid van ψ in $\mathcal{G}$.

Beschouw een willekeurige model $\mathcal{N}$ op $\mathcal{G}$ en een willekeurig punt $n \in \mathbb{N}$ van $\mathcal{G}$. Veronderstel dat $\mathcal{N}, n \Vdash !p$. Dat wil zeggen dat $\mathcal{N}, n \Vdash p$ en voor alle natuurlijke getallen $m \neq n$ geldt dat $\mathcal{N}, m \nVdash p$. In het bijzonder $\mathcal{N}, n+2 \nVdash p$, en daarom $\mathcal{N}, n+1 \nVdash \Diamond p$. Dus $\mathcal{N}, n+1 \Vdash \Diamond p \rightarrow p$, en daarom ($n+1$ is de enige opvolger van n) hebben we ook dat $\mathcal{N}, n \Vdash \Box(\Diamond p \rightarrow p)$ en $\mathcal{N}, n \Vdash \psi$. In voorgaande redenering zijn model $\mathcal{N}$ op $\mathcal{G}$ en punt $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dus is aangetoond dat $\mathcal{G} \Vdash \psi$.

(c) Bewijs dat de formule $!p$ niet definieerbaar is in de modale basistaal.

(Hint: associeer met een valuatie op $\mathcal{F}$ een valuatie op $\mathcal{G}$ en pas de invariantiestelling toe.)

Stel dat de operator ‘!’ wel definieerbaar is in de modale basistaal; dan is er een formule α in de modale basistaal equivalent met $!p$; met andere woorden: $\alpha!p \leftrightarrow$ is universeel geldig ($\#$). Uit deze veronderstelling leiden we een tegenspraak af; als volgt: Definieer $E = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $O = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, en beschouw valuaties π op $\mathcal{F}$ en v op $\mathcal{G}$ zodanig dat:

$$\pi(x)(p) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = e \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \quad v(n)(p) = \begin{cases} 1 & \text{als } n \in E \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

en laat $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \pi \rangle$ en $\mathcal{N} = \langle \mathcal{G}, v \rangle$. Definieer verder een relatie $B \subseteq \{e, o\} \times \mathbb{N}$ door $B = (\{e\} \times E) \cup (\{o\} \times O)$; B is een bisimulatie tussen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ (ga na!) en $\langle e, 0 \rangle \in B$. We hebben dat $\mathcal{M}, e \Vdash !p$, en dus volgt uit ($\#$) dat ook $\mathcal{M}, e \Vdash \alpha$. Modale waarheid is invariant onder bisimulatie, dus volgt dat ook $\mathcal{N}, 0 \Vdash \alpha$. Uit ($\#$) volgt dan weer $\mathcal{N}, 0 \Vdash !p$. Maar dat is in tegenspraak met de gegeven semantiek van de !-operator: er geldt $\mathcal{N}, 0 \nVdash !p$, want er zijn punten $m \neq 0$ waar $\mathcal{N}, m \Vdash p$.

We hebben laten zien dat de aanname ($\#$) dat de !-operator definieerbaar is in de modale basistaal, leidt tot een tegenspraak. De conclusie is dat !-operator niet definieerbaar is in de modale basistaal.

Opgave 2.

- (a) *Wat betekent het dat een modale formule φ een frame-eigenschap P karakteriseert?*

Een modale formule φ karakteriseert een frame-eigenschap P als voor alle frames $\mathcal{F}$ geldt dat φ geldig is in $\mathcal{F}$ dan en slechts dan als $\mathcal{F}$ eigenschap P heeft. Omdat een frame-eigenschap P niets anders is dan de klasse van frames met die eigenschap, kunnen we de betekenis van φ karakteriseert P ook zo geven:

$$\mathcal{F} \models \varphi \iff \mathcal{F} \in P.$$

- (b) *Laat $\chi = p \rightarrow \Box_1 \Diamond_2 p$, een multimodale formule over de verzameling $\{1, 2\}$, en K de klasse van $\{1, 2\}$ -frames gedefinieerd door:*

$$K = \{ \langle W, R_1, R_2 \rangle \mid \forall x, y \in W (R_1 xy \implies R_2 yx) \}.$$

Bewijs dat χ de klasse K karakteriseert.

We bewijzen de twee implicaties $\Leftarrow$ en $\Rightarrow$ (als in onderdeel (a)):

($\Leftarrow$) Om te bewijzen dat χ geldig is in alle frames $\mathcal{F}$ van K , beschouwen we een willekeurig frame $\mathcal{F} = \langle W, R_1, R_2 \rangle \in K$, een willekeurig model $\mathcal{M}$ op $\mathcal{F}$, en een willekeurig punt $w \in W$ zodat $\mathcal{M}, w \Vdash p$. Te bewijzen is dat $\mathcal{M}, w \Vdash \Box_1 \Diamond_2 p$. Beschouw daartoe een willekeurige R_1 -opvolger v van w ; dus een punt $v \in W$ zodat $R_1 wv$. Te bewijzen is dat $\mathcal{M}, v \Vdash \Diamond_2 p$. Door de eigenschap $\forall x, y (R_1 xy \implies R_2 yx)$ van het frame, volgt uit $R_1 wv$ dat $R_2 vw$. En dus weten we, omdat $\mathcal{M}, w \Vdash p$, dat $\mathcal{M}, v \Vdash \Diamond_2 p$.

($\Rightarrow$) Laat $\mathcal{F} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$ willekeurig en veronderstel $\mathcal{F} \models \chi$. Om te bewijzen dat $\mathcal{F} \in K$, beschouwen we een willekeurig tweetal punten $x, y \in W$ zodat $R_1 xy$. Te bewijzen is dat $R_2 yx$. Kies een valuatie π op $\mathcal{F}$ die p alleen in punt x waarmaakt (daarmee hebben we de mogelijkheid $x = y$ niet uitgesloten). De formule χ is geldig in $\mathcal{F}$, dus ook in punt x van het model $\langle \mathcal{F}, \pi \rangle$. Er volgt dat $\langle \mathcal{F}, \pi \rangle, x \Vdash \Diamond_2 p$. Daaruit volgt, in combinatie met de keuze van de valuatie π , dat het wel zo moet zijn dat $R_2 yx$.

- (c) *Waarom volgt uit onderdeel (b) dat ook de formule $\Diamond_1 \Box_2 p \rightarrow p$ de klasse K karakteriseert?*

We bewijzen weer twee richtingen; laat $\psi = \Diamond_1 \Box_2 p \rightarrow p$:

($\Leftarrow$) Stel $\mathcal{F} \in K$. Uit onderdeel (b) volgt dat $\mathcal{F} \models \chi$. Laat σ een substitutie met $\sigma(p) = \neg p$. Dan $\chi^\sigma = \neg p \rightarrow \Box_1 \Diamond_2 \neg p$ is equivalent met ψ . Bovendien, omdat geldigheid behouden blijft onder substitutie, hebben we dat $\mathcal{F} \models \chi^\sigma$ en dus ook $\mathcal{F} \models \psi$.

($\Rightarrow$) Stel $\mathcal{F} \models \psi$. Dan ook $\mathcal{F} \models \psi^\sigma$ met σ als in voorgaand item, weer omdat geldigheid behouden blijft onder substitutie. Verder is ψ^σ equivalent met χ , en dus hebben we dat $\mathcal{F} \models \chi$. Dan volgt uit onderdeel (b) dat $\mathcal{F} \in K$.

- (d) *Karakteriseert de formule $\Diamond \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ transitiviteit? Motiveer je antwoord.*

Neen. We gebruiken de afkorting $\zeta = \Diamond \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$. De formule ζ is geldig in alle transitieve frames. In die frames geldt immers de formule $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$, en omdat geldigheid behouden blijft onder substitutie is ook $\Diamond \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ geldig in transitieve frames (neem $\Diamond p$ voor p). Dan volgt eenvoudig dat ook ζ geldig is in transitieve frames, omdat $\mathcal{F} \models \phi \rightarrow \psi$ en $\mathcal{F} \models \psi \rightarrow \chi$ impliceert dat $\mathcal{F} \models \phi \rightarrow \chi$, voor alle frames $\mathcal{F}$ en formules ϕ, ψ, χ .

Echter, het is niet zo dat als ζ geldig is in een frame $\mathcal{F}$, dat $\mathcal{F}$ dan transitief is. Beschouw maar het frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ met $W = \{a, b, c, d\}$ en $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, d \rangle\}$. Dit frame is niet transitief (bijvoorbeeld $\langle a, c \rangle \notin R$), maar toch $\mathcal{F} \models \zeta$. In punten b, c en d is ζ triviaal waar, ongeacht de valuatie, en als, voor zekere valuatie π , geldt dat $\langle \mathcal{F}, \pi \rangle, a \Vdash \Diamond^3 p$, dan moet het wel zo zijn dat $\langle \mathcal{F}, \pi \rangle, d \Vdash p$ en dus, vanwege Rad ook $\langle \mathcal{F}, \pi \rangle, a \Vdash \Diamond p$.

Opgave 3. Het Hilbert systeem T is de uitbreiding van het basissysteem K met het waarheids-axioma A1. Systeem $S4$ is de uitbreiding van T met het axioma van positieve introspectie A2.

(a) Geef een afleiding van $Kp \rightarrow \neg K\neg p$ in systeem T .

1. $Kp \rightarrow p$ (A1)
2. $K\neg p \rightarrow \neg p$ (SUB, 1)
3. $(q \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$ (CT)
4. $(K\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg K\neg p)$ (SUB, 3)
5. $p \rightarrow \neg K\neg p$ (MP, 4, 2)
6. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (q \rightarrow s))$ (CT)
7. $(Kp \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg K\neg p) \rightarrow (Kp \rightarrow \neg K\neg p))$ (SUB, 6)
8. $(p \rightarrow \neg K\neg p) \rightarrow (Kp \rightarrow \neg K\neg p)$ (MP, 7, 1)
9. $Kp \rightarrow \neg K\neg p$ (MP, 8, 5)

(b) Laat zien dat A3, het axioma van negatieve introspectie, niet afleidbaar is in $S4$.

A3 is het axioma $\neg Kp \rightarrow K\neg Kp$. De volledigheidstelling voor $S4$ luidt:

$$\vdash_{S4} \phi \iff C_{\text{refl,trans}}^n \models \phi, \text{ voor alle formules } \phi,$$

waarbij $C_{\text{refl,trans}}^n$ de klasse van reflexieve en transitieve epistemische n -frames is. We laten zien dat A3 niet geldig is in $C_{\text{refl,trans}}^n$ en concluderen dan, middels een toepassing van bovenstaande volledigheidstelling voor $S4$ dat A3 niet afleidbaar is in $S4$.

Beschouw het model $\mathcal{M} = \langle W, R, \pi \rangle$ met $W = \{a, b\}$, $R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle\}$, $\pi(a)(p) = 0$ en $\pi(b)(p) = 1$. Dan geldt $\mathcal{M}, a \not\models Kp$, want $\mathcal{M}, a \not\models p$ en Raa . Dus $\mathcal{M}, a \Vdash \neg Kp$. Verder hebben we dat $\mathcal{M}, b \Vdash Kp$, omdat b de enige R -opvolger van b is en $\mathcal{M}, b \Vdash p$. Daaruit volgt $\mathcal{M}, b \not\models \neg Kp$ en dus, vanwege Rab , ook dat $\mathcal{M}, a \not\models K\neg Kp$. Dus $\mathcal{M}, a \not\models A3$ en $C_{\text{refl,trans}}^n \not\models A3$.

(c) Bewijs dat een reflexieve en euclidische relatie een equivalentierelatie is.

Een relatie R is een equivalentierelatie als R reflexief, transitief en symmetrisch is.

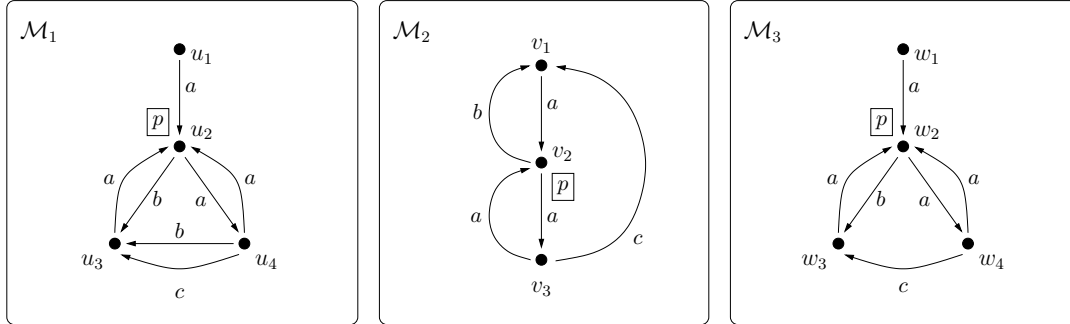
Beschouw een reflexieve en euclidische relatie $R \subseteq A \times A$ op een verzameling A . Om te bewijzen dat R symmetrisch is, laat $a, b \in A$ met Rab willekeurig. Uit Rab en Raa (vanwege reflexiviteit) volgt met eucliditeit van R (d.w.z. $Rxy \ \& \ Rxz \implies Ryz$, voor alle $x, y, z \in A$) dat Rba . Daarmee is symmetrie bewezen. Om te bewijzen dat R transitief is, veronderstel $a, b, c \in A$ met Rab en Rbc . Dan hebben we met symmetrie van R dat er ook een stap Rba is. Met euclid. volgt dan uit Rba en Rbc dat Rac .

(d) Laat zien dat in het Hilbert systeem dat we verkrijgen door axioma A3 toe te voegen aan T axioma A2 afleidbaar is.

- | | | |
|-----|---|--------------|
| 1. | $Kp \rightarrow p$ | (A1) |
| 2. | $K \neg Kp \rightarrow \neg Kp$ | (SUB, 1) |
| 3. | $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$ | (CT) |
| 4. | $(K \neg Kp \rightarrow \neg Kp) \rightarrow (Kp \rightarrow \neg K \neg Kp)$ | (SUB, 3) |
| 5. | $Kp \rightarrow \neg K \neg Kp$ | (MP, 4, 2) |
| 6. | $\neg Kp \rightarrow K \neg Kp$ | (A3) |
| 7. | $\neg K \neg Kp \rightarrow K \neg K \neg Kp$ | (SUB, 6) |
| 8. | $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$ | (CT) |
| 9. | $(\neg Kp \rightarrow K \neg Kp) \rightarrow (\neg K \neg Kp \rightarrow Kp)$ | (SUB, 8) |
| 10. | $\neg K \neg Kp \rightarrow Kp$ | (MP, 9, 6) |
| 11. | $K(\neg K \neg Kp \rightarrow Kp)$ | (UG) |
| 12. | $K(p \rightarrow q) \rightarrow (Kp \rightarrow Kq)$ | (DB) |
| 13. | $K(\neg K \neg Kp \rightarrow Kp) \rightarrow (K \neg K \neg Kp \rightarrow KKp)$ | (SUB, 12) |
| 14. | $K \neg K \neg Kp \rightarrow KKp$ | (MP, 13, 11) |
| 15. | $Kp \rightarrow K \neg K \neg Kp$ | (†, 5, 7) |
| 16. | $Kp \rightarrow KKp$ | (†, 15, 14) |

waarbij † de afgeleide regel is zoals vermeld op pagina 34 van de syllabus.

Opgave 4. Beschouw de volgende $\{a, b, c\}$ -modellen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$:



(a) Leg uit waarom de toestanden u_1 en v_1 niet bisimuleren.

Stel dat er wel een bisimulatie Z was met $u_1 Z v_1$. Dan volgt uit $u_1 \xrightarrow{a} u_2$ dat $u_2 Z v_2$ (want v_2 is het enige punt bereikbaar vanuit v_1 met een a -stap). Daaruit volgt dan weer $u_4 Z v_3$, omdat $u_2 \xrightarrow{a} u_4$ en omdat v_3 de enige a -opvolger van v_2 is. Maar de stap $u_4 \xrightarrow{b} u_3$ in model $\mathcal{M}_1$ kan niet worden gematcht met een stap vanuit v_3 in model $\mathcal{M}_2$; er vertrekken geen b -pijlen vanuit v_3 . De punten u_4 en v_3 bisimuleren dus niet. Ergo de aanname was onjuist. Conclusie: er is geen bisimulatie tussen punt u_1 en punt v_1 .

(b) Geef een onderscheidende formule voor de toestanden u_1 en v_1 .

Neem bijvoorbeeld de formule $\Box_a \Box_a \Diamond_b \top$ die waar is in u_1 maar niet in v_1 .

(c) Geef een relatie $E \subseteq \{v_1, v_2, v_3\} \times \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zodat $E : \mathcal{M}_2, v_1 \rightleftharpoons \mathcal{M}_3, w_1$. Doe alleen verslag van het verifiëren van dat E aan de zig-conditie voldoet. Bestaat er een onderscheidende formule voor v_1 en w_1 ?

Laat $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ en $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. De relatie $E \subseteq V \times W$ gedefinieerd door:

$$E = \{\langle v_1, w_1 \rangle, \langle v_1, w_3 \rangle, \langle v_2, w_2 \rangle, \langle v_3, w_4 \rangle\}$$

is een bisimulatie. We verifiëren de voorwaartse conditie (*zig*) van de definitie van bisimulatie.

We schrijven $\frac{x}{y} \Big| \frac{x'}{y'} \ell$ als $\langle x, x' \rangle \in E$ en $x \xrightarrow{\ell} y$ een stap in $\mathcal{M}_2$ met $\ell \in \{a, b, c\}$ en y' de getuige die we zoeken, dus y' is het punt zodat $x' \xrightarrow{\ell} y'$ en $\langle y, y' \rangle \in E$. Omdat punten v_2 en v_3 twee uitgaande pijlen hebben, dienen we zes stappen in $\mathcal{M}_2$ te matchen in $\mathcal{M}_3$:

$$\frac{v_1}{v_2} \Big| \frac{w_1}{w_2} a \quad \frac{v_1}{v_2} \Big| \frac{w_3}{w_2} a \quad \frac{v_2}{v_3} \Big| \frac{w_2}{w_4} a \quad \frac{v_2}{v_1} \Big| \frac{w_2}{w_3} b \quad \frac{v_3}{v_2} \Big| \frac{w_4}{w_2} a \quad \frac{v_3}{v_1} \Big| \frac{w_4}{w_3} c$$

Met de invariantiestelling, die zegt dat modale waarheid invariant is onder bisimulatie, volgt uit $E : \mathcal{M}_2, v_1 \leftrightarrow \mathcal{M}_3, w_1$ dat punten v_1 en w_1 modaal equivalent zijn, d.w.z. dezelfde formules waarmaken. Er bestaat dus geen formule die v_1 van w_1 onderscheidt.

- (d) Zij $\widehat{\mathcal{M}}_2$ de PDL-uitbreiding van $\mathcal{M}_2$. Geef de toegankelijkheidsrelaties $\widehat{R}_\alpha$, $\widehat{R}_\beta$, $\widehat{R}_\gamma$, $\widehat{R}_\delta$ van $\widehat{\mathcal{M}}_2$ behorend bij de PDL-programma's:

$$\alpha = b \cup c \quad \beta = a^* \alpha \quad \gamma = \beta a \quad \delta = \gamma^*$$

$$\begin{aligned} \widehat{R}_a &= R_a &= \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle\} \\ \widehat{R}_b &= R_b &= \{\langle v_2, v_1 \rangle\} \\ \widehat{R}_c &= R_c &= \{\langle v_3, v_1 \rangle\} \\ \widehat{R}_{a^*} &= (\widehat{R}_a)^* &= \{\langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_3 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_3, v_3 \rangle\} \\ \widehat{R}_\alpha &= \widehat{R}_b \cup \widehat{R}_c &= \{\langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_3, v_1 \rangle\} \\ \widehat{R}_\beta &= \widehat{R}_{a^*} ; \widehat{R}_\alpha &= \{\langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_3, v_1 \rangle\} \\ \widehat{R}_\gamma &= \widehat{R}_\beta ; \widehat{R}_a &= \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle\} \\ \widehat{R}_\delta &= (\widehat{R}_\gamma)^* &= \{\langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_3, v_3 \rangle\} \end{aligned}$$

- (e) Ga voor ieder van de PDL-formules $\langle \delta \rangle p$ en $[\delta]p$ na of deze waar is in $\widehat{\mathcal{M}}_2$.

Voor elk van de toestanden v_1, v_2, v_3 is er een $\widehat{R}_\delta$ -stap naar v_2 waar p waar is. Dus $\langle \delta \rangle$ is waar in het gehele model $\widehat{\mathcal{M}}_2$.

De formule $[\delta]p$ is niet globaal waar in $\widehat{\mathcal{M}}_2$. Bijvoorbeeld $\widehat{\mathcal{M}}_2, v_1 \not\models [\delta]p$ want $\langle v_1, v_1 \rangle \in \widehat{R}_\delta$ en $\widehat{\mathcal{M}}_2, v_1 \not\models p$.