

Bachelor Wiskunde

Bachelorscriptie

De Pontryagin-Thom-Constructie

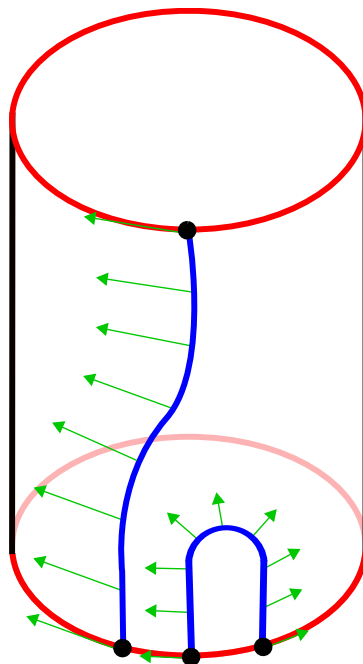
door

Orin Habich

1 juli 2018

Begeleider: dr. Thomas Rot

Tweede beoordelaar: prof. dr. Rob de Jeu



Afdeling Wiskunde

Faculteit der Exacte Wetenschappen

Samenvatting

In deze scriptie zetten we de Pontryagin-Thom-constructie uiteen, om vervolgens te onderzoeken hoe we deze kunnen generaliseren naar afbeeldingen met als codomein $\bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$, waarbij $S_i^{p_i}$ sferen zijn van dimensies p_i .

We behandelen eerst een aantal begrippen, zoals gladde variëteiten, reguliere- en kritieke punten en ingekaderde (Engels: framed) cobordismes. Daarna staan de belangrijkste stellingen van de Pontryagin-Thom-constructie centraal. Hoe de constructie kan worden toegepast, illustreren we vervolgens door er de stelling van Hopf mee te bewijzen.

In de hoofdstukken die volgen, generaliseren we de theorie naar afbeeldingen met als codomein $\bigvee_{i=1}^r S^{p_i}$. Dat doen we eerst algemeen, dan specifiek voor afbeeldingen van S^1 naar $S^1 \vee S^1$, en als laatste voor afbeeldingen van S^2 naar $S^1 \vee S^2$. Het doel in de laatste twee hoofdstukken is om invarianten te vinden die aangeven wanneer een ingekaderd cobordisme mogelijk is.

Titel: De Pontryagin-Thom-Constructie
Auteur: Orin Habich, orin.habich@vu.nl, 2543957
Begeleider: dr. Thomas Rot
Tweede beoordelaar: prof. dr. Rob de Jeu
Einddatum: 1 juli 2018

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit Amsterdam
de Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam
<http://www.math.vu.nl/>

Inhoudsopgave

1	Inleiding	4
2	Variëteiten en afbeeldingen	6
3	Reguliere en kritieke punten	9
4	Ingekaderde cobordismes	12
5	Oriëntatie van variëteiten	16
6	Pontryagin-variëteiten	17
7	Iedere variëteit is een Pontryagin-variëteit	20
8	Homotopieën en ingekaderde cobordismes	23
9	De graad van een afbeelding	29
10	De stelling van Hopf	32
11	Afbeeldingen naar $\bigvee_{i=1}^r S^{p_i}$	38
12	Afbeeldingen van S^1 naar $S^1 \vee S^1$	44
13	Afbeeldingen van S^2 naar $S^1 \vee S^2$	48
14	Discussie	55
	Bibliografie	56

1 Inleiding

Stel, we hebben twee variëteiten en de verzameling van alle gladde afbeeldingen daartussen. Hoe vinden we dan de homotopieklassen van deze afbeeldingen?

In deze scriptie behandelen en veralgemeniseren we een constructie waarmee we dit classificatievraagstuk kunnen oplossen. Deze constructie uit de differentiaaltopologie is een meetkundige benadering, die de namen draagt van de bedenkers: de Sovjet-Russische wiskundige Lev Pontryagin (1908-1988) en de Franse wiskundige René Thom (1923-2002).

Bij de Pontryagin-Thom-constructie kijken we naar het inverse beeld van een punt. Van bijna alle waarden uit het codomein is het inverse beeld een deelvariëteit. De verzameling van alle deelvariëteiten wordt in equivalentieklassen verdeeld, door gebruik te maken van zogenaamde ingekaderde (Engels: framed) cobordismes. Wanneer we deze equivalentieklassen bestuderen, blijkt er een één-op-één relatie te zijn met de homotopieklassen.

Volgens de Amerikaanse hoogleraar en Fields-medaille-winnaar John W. Milnor, introduceerde Pontryagin de theorie over ingekaderde cobordismes om daarmee de homotopieklassen te bestuderen van afbeeldingen tussen sferen $S^m \rightarrow S^p$, waarbij de dimensies m en p van deze sferen zó zijn dat $m > p$. Voor $m = p + 1 \geq 4$ zijn er bijvoorbeeld precies twee homotopieklassen van afbeeldingen $S^m \rightarrow S^p$. Pontryagin bewees dit resultaat door ingekaderde 1-dimensionale variëteiten in S^m te classificeren.

De constructie van Pontryagin is bovendien een mes dat aan twee kanten snijdt. Deze constructie maakt het niet alleen mogelijk om informatie over variëteiten naar homotopietheorie te vertalen, maar het maakt het andersom ook mogelijk om homotopietheorie terug te vertalen naar informatie over variëteiten. Deze wisselwerking heeft belangrijke resultaten in de topologie opgeleverd, waaronder het werk van René Thom over cobordismes.

Het doel van deze scriptie is het uiteenzetten van de constructie, om deze vervolgens uit te breiden naar afbeeldingen met als codomein meerdere sferen, mogelijk van verschillende dimensies, die in één punt ‘aan elkaar geplakt zijn’.

Deze uitbreiding is nieuw. Hiervoor bekijken we de nieuwe situatie eerst algemeen, om vervolgens specifieke gevallen te onderzoeken. Dat levert interessante meetkundige hindernissen op voor de constructie van ingekaderde cobordismes. De onderzoeksvraag die daarbij opduikt, is of er een invariant te vinden is die aangeeft wanneer een hindernis daadwerkelijk een obstructie vormt voor een ingekaderd cobordisme.

In meer detail is de opbouw van deze scriptie als volgt. In de hoofdstukken 2 tot en met 8 behandelen we de Pontryagin-Thom-constructie. Hierbij dient het boek ‘Topology from the Differential Viewpoint’ van John W. Milnor [1] als uitgangspunt.

In de hoofdstukken 2 tot en met 5 introduceren we voornamelijk begrippen, waarna de hoofdstukken 6 tot en met 8 de belangrijkste stellingen behandelen.

In hoofdstuk 10 gebruiken we de Pontryagin-Thom-constructie om de stelling van Hopf te bewijzen. Hiervoor introduceren we eerst het begrip ‘graad’ in hoofdstuk 9. Een belangrijke aanvullende bron voor deze hoofdstukken is een werkstuk van Joshua Bosshardt [4] van de University of Chicago.

Vanaf hoofdstuk 11 generaliseren we de Pontryagin-Thom-constructie. We gaan de theorie opnieuw langs en maken waar nodig aanpassingen.

De hoofdstukken 12 en 13 gaan ieder in op een specifiek geval, waarbij hoofdstuk 12 zich richt op afbeeldingen van S^1 naar $S^1 \vee S^1$. Hier duikt een probleem op dat we oplossen met behulp van ‘woorden’. Met deze woorden blijken we in staat om aan te geven wanneer een ingekaderd cobordisme mogelijk is.

In hoofdstuk 13 richten we onze pijlen op afbeeldingen van S^2 naar $S^1 \vee S^2$. Het codomein heeft dit keer dus verschillende dimensies. Voor het probleem dat hier opduikt vinden we geen volledige oplossing, maar wel een gedeeltelijke. Dit hoofdstuk eindigt met de speculaties en vermoedens die aan het eind van het project overbleven.

We sluiten af met de discussie in hoofdstuk 14, waarin we terugkijken op het resultaat en reflecteren op de gevonden oplossingen.

2 Variëteiten en afbeeldingen

In dit hoofdstuk behandelen we een aantal begrippen die misschien al bekend zijn bij de lezer, maar van dusdanig belang zijn dat het geen kwaad kan om ze hier te herhalen. Bovendien geeft dit de gelegenheid om wat notatie in te voeren.

Om te beginnen, wordt met $\mathbb{R}^k$ de k -dimensionale Euclidische ruimte bedoeld. Een element $x \in \mathbb{R}^k$ is een vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ waarbij $x_i \in \mathbb{R}$ voor alle $i = 1, 2, \dots, k$. Bepaalde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^k$ zijn variëteiten, en deze objecten spelen een centrale rol in deze scriptie. Om te definiëren wat een variëteit is, gebruiken we homeomorfismen. Een afbeelding $f : X \rightarrow Y$, tussen twee deelverzamelingen van Euclidische ruimtes, is een homeomorfisme als zijn inverse f^{-1} bestaat, en f en f^{-1} beide continu zijn.

Definitie 2.1. Een *variëteit* is een deelverzameling $M \subset \mathbb{R}^k$, waarbij er voor iedere $x \in M$ een open deelverzameling $W \subset \mathbb{R}^k$ bestaat, zodat $x \in W \cap M$, en er een homeomorfisme $\varphi : U \rightarrow W \cap M$ bestaat met $U \subset \mathbb{R}^m$ open. De homeomorfismen φ heten *parametrisaties* en het getal m is de dimensie van de variëteit.

In het bijzonder zijn we geïnteresseerd in gladde variëteiten. Om duidelijk te maken wat een gladde variëteit is, bekijken we eerst wat een gladde afbeelding is. Een afbeelding $f : U \rightarrow V$ heet *glad* als alle partiële afgeleiden van f bestaan. Hierbij zijn $U \subset \mathbb{R}^k$ en $V \subset \mathbb{R}^l$ twee deelverzamelingen van Euclidische ruimtes, met het domein U bovendien open. De volgende definitie van een gladde afbeelding werkt ook als het domein niet open is.

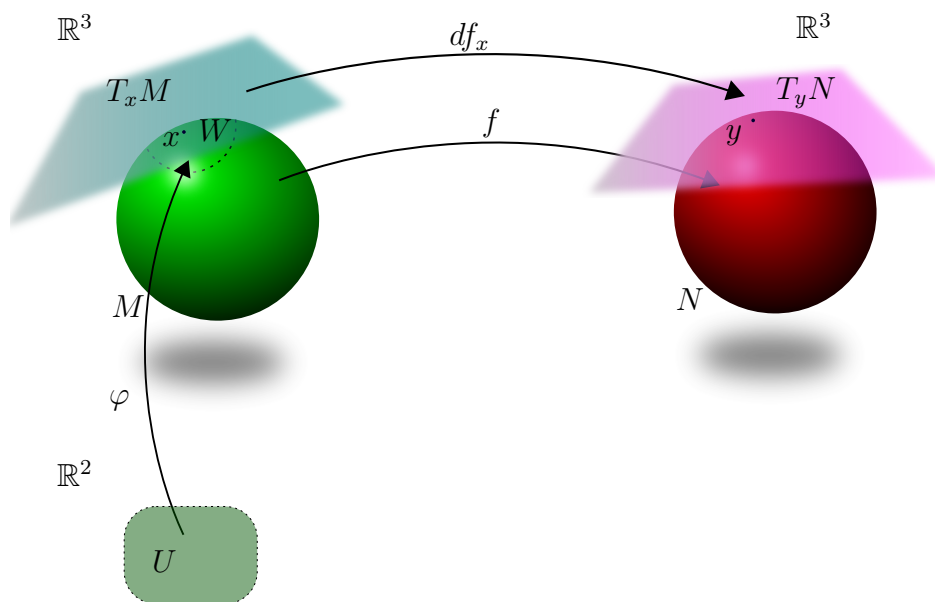
Definitie 2.2. Laat $X \subset \mathbb{R}^k$ en $Y \subset \mathbb{R}^l$ twee deelverzamelingen van Euclidische ruimtes zijn. Een afbeelding $f : X \rightarrow Y$ heet *glad* als voor iedere $x \in X$ een open omgeving $W \subset \mathbb{R}^k$ bestaat, en een gladde afbeelding $F : W \rightarrow \mathbb{R}^l$, zodat $F|_{W \cap X} = f|_{W \cap X}$.

Het combineren van de begrippen glad en homeomorf levert een nog sterkere eigenschap op die een afbeelding kan hebben.

Definitie 2.3. Laat $X \subset \mathbb{R}^k$ en $Y \subset \mathbb{R}^l$ twee willekeurige deelverzamelingen van Euclidische ruimtes zijn. Een afbeelding $f : X \rightarrow Y$ is een *diffeomorfisme* als f een homeomorfisme is en bovendien f en f^{-1} beide gladde afbeeldingen zijn.

Met behulp van diffeomorfismen definiëren we nu wat een gladde variëteit is.

Definitie 2.4. Een *gladde variëteit* is een variëteit waarbij alle parametrisaties zo gekozen kunnen worden dat het diffeomorfismen zijn.



Figuur 2.1: Een afbeelding f van $M = S^2$ naar $N = S^2$, met afgeleide $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$ en een parametrisatie $\varphi : U \rightarrow W$.

In feite kunnen variëteiten abstracter zijn, maar een belangrijke stelling van Hassler Whitney zegt dat alle gladde variëteiten op een gladde manier ingebed kunnen worden in een Euclidische ruimte (zie [3, p133]). De definitie van een variëteit zoals we die hier gebruiken, als deelverzameling van een Euclidische ruimte, volstaat daarom.

We breiden de definitie van een gladde variëteit nu verder uit. Neem de gesloten halfruimte

$$H^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}.$$

De rand ∂H^m is gedefinieerd als het hypervlak $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$.

Definitie 2.5. Een *gladde variëteit met rand* is een deelverzameling $M \subset \mathbb{R}^k$, waarbij er voor iedere $x \in M$ een omgeving $W \cap X$ bestaat die diffeomorf is met een open deelverzameling $U \cap H^m$ van H^m . De rand ∂M is de verzameling punten uit M die onder zulke diffeomorfismen corresponderen met de punten uit ∂H^m .

Definitie 2.6. Een variëteit M heet *gesloten* als deze compact is en geen rand heeft, dus $\partial M = \emptyset$.

We gaan nu afbeeldingen tussen variëteiten bekijken, en in het bijzonder hoe we de afgeleide van zo'n afbeelding moeten beschouwen.

Laat $f : M \rightarrow N$ een gladde afbeelding zijn tussen de gladde variëteiten $M \subset \mathbb{R}^k$ en $N \subset \mathbb{R}^l$. De afgeleide df_x in een punt $x \in M$ zal gedefinieerd worden als een lineaire afbeelding $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$, waarbij $y = f(x)$. De verzamelingen $T_x M \subset \mathbb{R}^k$ en $T_y N \subset \mathbb{R}^l$ zijn raakruimtes. Dit zijn lineaire deelruimtes en in het bijzonder vectorruimtes. In Figuur 2.1 is een voorbeeld te zien van een afbeelding tussen variëteiten. Voor open verzamelingen is de definitie van de raakruimte eenvoudig.

Definitie 2.7. Laat $W \subset \mathbb{R}^k$ een open deelverzameling zijn en $x \in W$. De *raakruimte* $T_x W$ aan W in het punt x is de gehele vectorruimte $\mathbb{R}^k$.

Met behulp van raakruimtes voor open deelverzamelingen kunnen we de afgeleide definiëren.

Definitie 2.8. Laat $W \subset \mathbb{R}^k$ en $V \subset \mathbb{R}^l$ twee open deelverzamelingen van Euclidische ruimtes zijn en $f : W \rightarrow V$ een gladde afbeelding. De *afgeleide* $df_x : T_x W \rightarrow T_y V$, waarbij $y = f(x)$, is volgens de vorige definitie gelijk aan $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$. Deze afgeleide wordt gedefinieerd door

$$df_x(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Dit werkt alleen voor open verzamelingen, voor variëteiten moeten we eerst nog bepalen wat de raakruimte aan een variëteit is.

Definitie 2.9. Laat $M \subset \mathbb{R}^k$ een gladde variëteit zijn, en $x \in M$. Laat $\varphi : U \rightarrow M$ een parametrisatie zijn, waarbij $\varphi(U)$ een open omgeving is van x . Beschouw φ als afbeelding van U naar $\mathbb{R}^k$, zodat de afgeleide $d\varphi_u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ gedefinieerd is, waarbij $u \in U$ zodat $\varphi(u) = x$. De *raakruimte* $T_x M$ aan de variëteit M in het punt x is het beeld $d\varphi_u(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^k$ van $d\varphi_u$.

Nu zijn we klaar voor de definitie van een afgeleide tussen variëteiten.

Definitie 2.10. Laat $M \subset \mathbb{R}^k$ en $N \subset \mathbb{R}^l$ twee gladde variëteiten zijn en $f : M \rightarrow N$ een gladde afbeelding. De *afgeleide* van f is een lineaire afbeelding

$$df_x : T_x M \rightarrow T_y N,$$

waarbij $y = f(x)$. De afbeelding f is glad, dus volgens Definitie 2.2 bestaat er een open omgeving $W \subset \mathbb{R}^k$ van x , en een gladde afbeelding $F : W \rightarrow \mathbb{R}^l$, zodat $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$. De afgeleide df_x van f is vervolgens gedefinieerd als $df_x(v) := dF_x(v)$ voor alle vectoren $v \in T_x M$.

Opmerking. De raakruimte $T_x M$ is een vectorruimte, en zo horen er nog een aantal opmerkingen bij deze definities.

Definitie 2.9 hangt niet af van de gekozen parametrisatie φ , een andere parametrisatie zal dezelfde raakruimte $T_x M$ opleveren.

De afgeleide df_x in Definitie 2.10 is niet afhankelijk van de gekozen afbeelding F , een andere afbeelding zal dezelfde afgeleide opleveren. Bovendien geldt dat $dF_x(v) \in T_y N$ voor willekeurige $v \in T_x M$.

Dit zijn allemaal beweringen die we hier niet bewijzen omdat we niet te ver op deze details in wensen te gaan. De bewijzen zijn terug te vinden in [1, §1].

3 Reguliere en kritieke punten

De afgeleide stelt ons in staat om een bepaald onderscheid te maken tussen punten op een variëteit.

Definitie 3.1. Laat $f : M \rightarrow N$ een gladde afbeelding zijn tussen variëteiten. Een *regulier punt* is een element $x \in M$ waarvoor geldt dat df_x maximale rang heeft. Dat wil zeggen, de rang van df_x is gelijk aan de dimensie n van N . Een punt dat niet regulier is, heet *kritiek*. Een *reguliere waarde* is een punt $y \in N$ waarvoor geldt dat het volledig origineel $f^{-1}(y)$ enkel reguliere punten bevat. Een *kritieke waarde* is een punt $y \in N$ waarvoor geldt dat $f^{-1}(y)$ minstens één kritiek punt bevat.

Vanaf nu zal er regelmatig een willekeurige reguliere waarde uit het bereik van een gladde afbeelding gekozen worden. De volgende stelling zegt dat ‘de meeste’ waarden van een gladde afbeelding regulier zijn. Daarmee geeft deze stelling de garantie dat het inderdaad mogelijk is om een reguliere waarde te kiezen. Voor een bewijs verwijzen we naar [1, §3].

Stelling 3.2. (*Stelling van Sard*)

Laat $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ een gladde afbeelding zijn, met $U \subset \mathbb{R}^n$ open. De verzameling van kritieke waarden van f is een verzameling met Lebesgue-maat nul.

Een verzameling met Lebesgue-maat nul betekent dat voor iedere $\epsilon > 0$ de verzameling overdekt kan worden door n -dimensionale kubussen, waarvan het gezamenlijk volume minder dan ϵ is.

Opmerking. Een verzameling met Lebesgue-maat nul kan geen niet-lege, open deelverzameling bevatten. Iedere niet-lege, open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ bevat daarom een reguliere waarde en de verzameling van reguliere waarden ligt dus dicht in $\mathbb{R}^n$.

We gaan nu zien hoe een reguliere waarde een deelvariëteit geeft.

Stelling 3.3. *Laat $f : M \rightarrow N$ een gladde afbeelding zijn tussen variëteiten van respectievelijk dimensie m en n . Laat $y \in N$ een reguliere waarde zijn. Als $m \geq n$, dan is $f^{-1}(y) \subset M$ een gladde deelvariëteit van dimensie $m - n$.*

Bewijs. Te laten zien is dat er voor iedere $x \in f^{-1}(y)$ een open omgeving $W \subset M$ bestaat, zodat $W \cap f^{-1}(y)$ diffeomorf is met een open deelverzameling van $\mathbb{R}^{m-n}$.

Kies $x \in f^{-1}(y)$ willekeurig. De aanname dat y een reguliere waarde is geeft dat df_x maximale rang heeft, dus dat $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$ surjectief is. Dit betekent dat $\ker(df_x) \subset T_x M$ een $(m - n)$ -dimensionale vectorruimte is.

Stel dat $M \subset \mathbb{R}^k$ is en kies een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ die surjectief is op $\ker(df_x) \subset T_x M \subset \mathbb{R}^k$. Definieer een afbeelding $F : M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ door

$$F(x') := (f(x'), L(x')).$$

De afgeleide hiervan is

$$dF_x(v) = (df_x(v), L(v)),$$

dus dF_x is surjectief. Volgens de Inverse-Functie-Stelling (zie [8, p185]) is er een open omgeving $W \subset M$ van x , en een open omgeving $V \subset N \times \mathbb{R}^{m-n}$ van y , waarvoor $F|_W : W \rightarrow V$ een diffeomorfisme is. Het is nu zo dat

$$F(f^{-1}(y)) = (f(f^{-1}(y)), L(f^{-1}(y))) \in \{y\} \times \mathbb{R}^{m-n},$$

en dus is

$$F|_{f^{-1}(y) \cap W} : f^{-1}(y) \cap W \rightarrow (\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$$

een diffeomorfisme. □

Dit lemma ging uit van dimensies $m \geq n$. Voor $m < n$ observeren we het volgende.

Lemma 3.4. *Laat $f : M \rightarrow N$ een gladde afbeelding zijn tussen variëteiten van respectievelijk dimensie m en n . Als $m < n$, dan is f niet surjectief.*

Bewijs. Als $m < n$ dan kan de lineaire afbeelding $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$ niet maximale rang hebben. Er zijn in dit geval dus geen reguliere punten voor f , en het beeld $f(M)$ bestaat louter uit kritieke waarden. De stelling van Sard zegt nu dat het gehele beeld $f(M)$ Lebesgue-maat nul heeft. De afbeelding f kan dus niet surjectief zijn. □

Er bestaan overigens wel surjectieve afbeeldingen waarbij de dimensie van het codomein groter is dan die van het domein, zoals de Peano-kromme. Wat we zojuist gezien hebben, is dat deze ruimtevullende krommen niet glad kunnen zijn.

We doen nog een aantal observaties.

Lemma 3.5. *Laat $f : M \rightarrow N$ een gladde afbeelding zijn tussen variëteiten van dimensies m en n , waarbij $m \geq n$. Laat $y \in N$ een reguliere waarde zijn, zodat $M' := f^{-1}(y) \subset M$ een deelvariëteit is. Er geldt dan dat $\ker(df_x) = T_x M' \subset T_x M$. Een gevolg hiervan is dat*

$$df_x|_{T_x M'^\perp} : T_x M'^\perp \rightarrow T_y N$$

een isomorfisme is. Hierbij is $T_x M'^\perp$ de ruimte van normaalvectoren aan $T_x M'$ in $T_x M$.

Bewijs. We laten eerst zien dat $df_x|_{T_x M'^\perp}$ injectief is door aan te tonen dat $\ker(df_x|_{T_x M'^\perp}) = 0$.

Kies $v \in T_x M'$ willekeurig. De beperking van f tot $f|_{M'} : M' \rightarrow \{y\}$ geeft de afgeleide $df_x|_{T_x M'} : T_x M' \rightarrow T_y \{y\}$, waarbij $T_y \{y\}$ een 0-dimensionale vectorruimte is. Er volgt dat $df_x(v) = 0$, dus $T_x M' \subset \ker(df_x)$.

Kies nu een willekeurige vector $v \in \ker(df_x)$. Er geldt dan dat $df_x(v) = 0$ en deze $0 \in T_y N$ correspondeert met $y \in N$. Er volgt dat $v \in T_x M'$, oftewel $\ker(df_x) \subset T_x M'$. We concluderen dat $\ker(df_x|_{T_x M'^\perp}) = 0$.

De surjectiviteit bewijzen we als volgt. De rang van $df_x|_{T_x M'^\perp}$ is $m - m'$ en x is een regulier punt, dus $m - m' = n$ en $df_x|_{T_x M'^\perp}$ is surjectief. $\square$

Lemma 3.6. *Laat $f : M \rightarrow N$ een gladde afbeelding tussen variëteiten zijn met dimensies $m \geq n$, en laat $C \subset M$ de verzameling van kritieke punten zijn. Als M compact is, dan is de deelverzameling $f(C) \subset N$ van kritieke waarden ook compact.*

Bewijs. Kies een willekeurig regulier punt $x \in M \setminus C$. Laat A de $(n \times m)$ -matrix zijn van de lineaire afbeelding df_x . Deze matrix heeft volgens aanname rang n . Het feit dat $\text{rang}(A) = \text{rang}(AA^T)$ geeft nu dat $\text{rang}(AA^T) = n$, dus $\det(AA^T) \neq 0$. De afbeelding

$$\begin{aligned} \alpha : \{(n \times m)\text{-matrices}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(AA^T) \end{aligned}$$

is continu, en $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ is open, dus de deelverzameling

$$\alpha^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{(n \times m)\text{-matrices van rang } n\} \subset \{(n \times m)\text{-matrices}\}$$

is open.

Er volgt dat voor ieder punt $x' \in M$ voldoende dicht bij x de matrix A' van $df_{x'}$ ook maximale rang heeft. Dit betekent dat het complement $M \setminus C \subset M$ open is en $C \subset M$ dus gesloten. Een gesloten deelverzameling van een compacte ruimte is compact, dus er volgt dat $C \subset M$ compact is. De afbeelding f is continu en dit geeft dat $f(C) \subset N$ compact is. $\square$

4 Ingekaderde cobordismes

In dit hoofdstuk introduceren we twee equivalentierelaties, die kernbegrippen zijn voor de Pontryagin-Thom-constructie. Met deze begrippen kunnen we de verzameling van gesloten n -dimensionale variëteiten verdelen in equivalentieklassen.

Definitie 4.1. Laat N en $\hat{N}$ twee gesloten deelvariëteiten zijn van een gesloten variëteit M . De deelvariëteiten N en $\hat{N}$ heten *cobordant* binnen M als er een $\epsilon > 0$ bestaat zodat de deelverzameling

$$N \times [0, \epsilon) \cup \hat{N} \times (1 - \epsilon, 1] \subset M \times [0, 1]$$

uitgebreid kan worden tot een compacte deelvariëteit

$$X \subset M \times [0, 1],$$

zodanig dat

$$X \cap M \times ([0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1]) = N \times [0, \epsilon) \cup \hat{N} \times (1 - \epsilon, 1],$$

en zo dat

$$X \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) = \partial X.$$

In Figuur 4.2a zien we een voorbeeld van een cobordisme. Het woord cobordisme komt van ‘co’, wat hier samen betekent, en ‘bord’, het Franse woord voor rand. Kort gezegd zijn twee variëteiten cobordant als hun disjuncte vereniging de rand is van een variëteit van één dimensie hoger.

Lemma 4.2. *Cobordisme is een equivalentierelatie.*

Bewijs. Stel M is een gesloten variëteit met gesloten deelvariëteiten N , $\hat{N}$ en $\hat{\hat{N}}$.

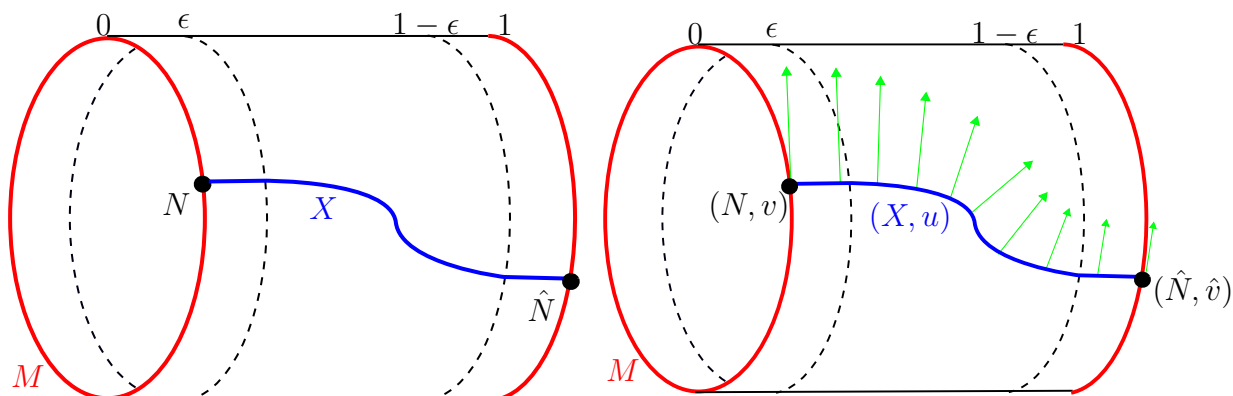
Cobordisme is een reflexieve relatie, want als we $X = N \times [0, 1]$ nemen, volgt direct dat N cobordant is met zichzelf binnen M .

Voor de symmetrie van de relatie draaien we X in feite om. Dat wil zeggen, stel dat N cobordant is met $\hat{N}$ binnen M , zodat er dus een X bestaat die voldoet aan de genoemde eisen in Definitie 4.1. De deelvariëteit $\bar{X} := \{(x, 1 - t) \in M \times [0, 1] \mid (x, t) \in X\}$ is een compacte uitbreiding van $\hat{N} \times [0, \epsilon) \cup N \times (1 - \epsilon, 1]$, dus $\hat{N}$ is cobordant met N binnen M .

De laatste eigenschap die we moeten laten zien is transitiviteit. Hiervoor ‘plakken we twee cobordismes aan elkaar’. In Figuur 4.3 is dit te zien. Stel dat N cobordant is met $\hat{N}$, en dat $\hat{N}$ cobordant is met $\hat{\hat{N}}$ binnen M . Na een herschaling van het interval $[0, 1]$ tot $[0, \frac{1}{2}]$ bestaat er dus een compacte deelvariëteit $X \subset M \times [0, \frac{1}{2}]$, zodanig dat

$$X \cap M \times \left(\left[0, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}\right] \right) = N \times \left[0, \frac{\epsilon}{2}\right) \cup \hat{N} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

Figuur 4.1

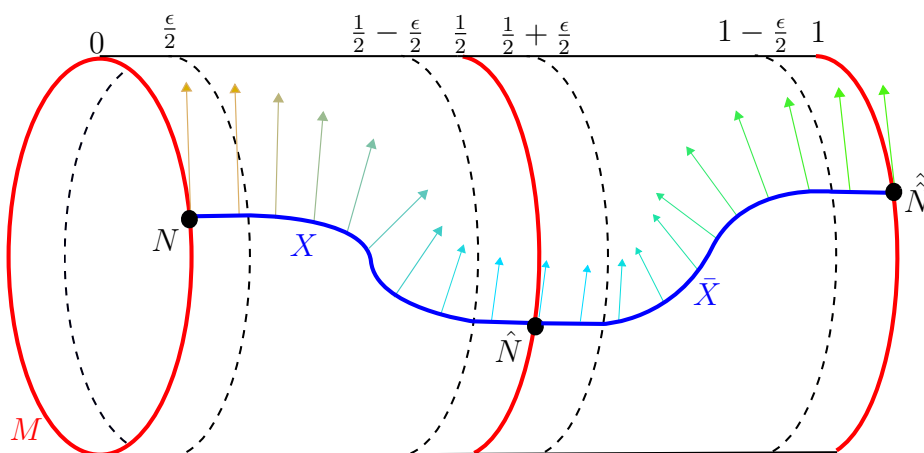


(a) Cobordisme

Hier zijn de 0-dimensionale deelvariëteiten N en $\hat{N}$ cobordant binnen de 1-dimensionale variëteit $M = S^1$. Dit is omdat ze de rand zijn van X , waarbij X een 1-dimensionale deelvariëteit is van de cilinder $S^1 \times [0, 1]$. De afbeelding ernaast vult dit voorbeeld aan met een inkadering.

(b) Ingekaderd cobordisme

De inkadering v van N geeft voor ieder punt $x \in N$, (dat is er slechts één in dit geval) een vector die een basis vormt voor de 1-dimensionale ruimte $T_x N^\perp \subset T_x M$. De inkadering $\hat{v}$ doet hetzelfde voor het punt $\hat{N}$. De inkadering u op X doet hetzelfde voor alle punten $x \in X$, maar deze laatste inkadering gaat op een gladde manier over van v naar $\hat{v}$.



Figuur 4.3: Een voorbeeld van het ‘plakken’ van ingekaderde cobordismes. Hiermee wordt de transitiviteit van deze relatie aangetoond. Te zien is hoe de ϵ -omgevingen ervoor zorgen dat het resultaat glad is.

en zodat

$$X \cap \left(M \times \{0\} \cup M \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right) = \partial X.$$

Er bestaat ook een compacte deelvariëteit $\bar{X} \subset M \times [\frac{1}{2}, 1]$, zodanig dat

$$\bar{X} \cap M \times \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) \cup \left(1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 \right] \right) = \hat{N} \times \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) \cup \hat{\hat{N}} \times \left(1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 \right],$$

en zodat

$$\bar{X} \cap \left(M \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup M \times \{1\} \right) = \partial \bar{X}.$$

Er volgt dat $X \cup \bar{X} \subset M \times [0, 1]$ een compacte deelvariëteit is zodat

$$(X \cup \bar{X}) \cap M \times ([0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1]) = N \times [0, \epsilon) \cup \hat{\hat{N}} \times (1 - \epsilon, 1],$$

en zodat

$$(X \cup \bar{X}) \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) = \partial(X \cup \bar{X}).$$

Dit betekent dat N en $\hat{\hat{N}}$ cobordant zijn binnen M . □

De relatie cobordisme geeft een partitie van de verzameling van gladde en gesloten n -dimensionale deelvariëteiten van een variëteit M . Deze verzameling van equivalentie-klassen noteren we met $\Omega_n(M)$. Het begrip cobordisme vullen we nu aan.

Definitie 4.3. Laat $N \subset M$ een deelvariëteit zijn. Een *inkadering* (Engels: framing) van N is een gladde functie $v(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_{m-n}(x))$ op N , die voor iedere $x \in N$ een basis geeft voor $T_x N^\perp \subset T_x M$, de ruimte van normaalvectoren aan N in M . Het paar (N, v) heet een ingekaderde deelvariëteit van M .

Dit geeft ons het concept van ingekaderde cobordismes tussen gesloten variëteiten.

Definitie 4.4. Twee ingekaderde deelvariëteiten $(N, v), (\hat{N}, \hat{v}) \subset M$ heten *ingekaderd cobordant* als er een cobordisme $X \subset M \times [0, 1]$ bestaat tussen N en $\hat{N}$, en er een inkadering w op X bestaat, zodanig dat voor alle coördinaatfuncties $w_i : X \rightarrow M \times [0, 1]$ geldt

$$w_i(x, t) = \begin{cases} v_i(x, 0) & \text{voor } (x, t) \in N \times [0, \epsilon) \\ \hat{v}_i(x, 0) & \text{voor } (x, t) \in \hat{N} \times (1 - \epsilon, 1]. \end{cases}$$

In afbeelding 4.2b is een voorbeeld te zien van een ingekaderd cobordisme. We hadden al gezien dat cobordisme een equivalentierelatie is. Het volgende lemma laat zien dat ook ingekaderd cobordisme een equivalentierelatie is.

Lemma 4.5. *Ingekaderd cobordant is een equivalentierelatie.*

Bewijs. De cobordismes volgen uit Lemma 4.2, dus er hoeven alleen inkaderingen aangetoond te worden. Laat (N, v) , $(\hat{N}, \hat{v})$ en $(\hat{\hat{N}}, \hat{\hat{v}})$ ingekaderde deelvariëteiten zijn van M .

We beginnen met de reflexiviteit. Neem voor de inkadering w de functie met coördinaatfuncties $w_i(x, t) = (v_i(x), t)$ voor alle $(x, t) \in N \times [0, 1]$. Er volgt dat (N, v) ingekaderd cobordant is met zichzelf.

De symmetrie bewijzen we als volgt. Stel dat (N, v) ingekaderd cobordant is met $(\hat{N}, \hat{v})$. Er bestaat dus een inkadering w op X , zodat voor alle coördinaatfuncties $w_i : X \rightarrow M \times [0, 1]$ geldt

$$w_i(x, t) = \begin{cases} v_i(x, 0) & \text{voor } (x, t) \in N \times [0, \epsilon) \\ \hat{v}_i(x, 0) & \text{voor } (x, t) \in \hat{N} \times (1 - \epsilon, 1] \end{cases}.$$

Neem $\bar{X}$ zoals in het bewijs van Lemma 4.2 en definieer $\bar{w}_i : \bar{X} \rightarrow M \times [0, 1]$ door $\bar{w}_i(x, t) := w_i(x, -t)$. Deze functies $\bar{w}_i$ zijn precies de coördinaatfuncties voor de inkadering $\bar{w}$ op $\bar{X}$ waardoor $(\hat{N}, \hat{v})$ ingekaderd cobordant is met (N, v) .

Er rest nu alleen nog te laten zien dat de relatie transitief is. Dat doen we door twee ingekaderde cobordismes ‘aan elkaar te plakken’. Figuur 4.3 illustreert dit deel. Stel dat (N, v) ingekaderd cobordant is met $(\hat{N}, \hat{v})$, en dat $(\hat{N}, \hat{v})$ ingekaderd cobordant is met $(\hat{\hat{N}}, \hat{\hat{v}})$, waarbij de bijbehorende inkaderingen gegeven zijn door respectievelijk w en $\bar{w}$. Herschaal deze inkaderingen w en $\bar{w}$ zodat voor de coördinaatfuncties geldt

$$w_i(x, t) = \begin{cases} v_i(x, t) & \text{voor } (x, t) \in N \times [0, \frac{\epsilon}{2}) \\ \hat{v}_i(x, t) & \text{voor } (x, t) \in \hat{N} \times (\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases},$$

en

$$\bar{w}_i(x, t) = \begin{cases} \hat{v}_i(x, t) & \text{voor } (x, t) \in \hat{N} \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}) \\ \hat{\hat{v}}_i(x, t) & \text{voor } (x, t) \in \hat{\hat{N}} \times (1 - \frac{\epsilon}{2}, 1] \end{cases}.$$

Laat $\bar{\bar{w}}$ een inkadering op $X \cup \bar{X}$ met coördinaatfuncties $\bar{\bar{w}}_i : X \cup \bar{X} \rightarrow M \times [0, 1]$ waarvoor geldt

$$\bar{\bar{w}}_i(x, t) = \begin{cases} w_i(x, t) & \text{voor } (x, t) \in N \times [0, \frac{1}{2}] \\ \bar{w}_i(x, t) & \text{voor } (x, t) \in \hat{\hat{N}} \times [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Deze inkadering $\bar{\bar{w}}$ geeft dat (N, v) ingekaderd cobordant is met $(\hat{\hat{N}}, \hat{\hat{v}})$. □

Door de relatie cobordisme uit te breiden met inkaderingen, verfijnen we de partitie $\Omega_n(M)$. De verzameling van gladde gesloten n -dimensionale deelvariëteiten van een variëteit M delen we nu op in klassen van ingekaderde cobordismes. De notatie is $\Omega_n^{\text{fr}}(M)$, waarbij ‘fr’ staat voor ‘framed’, wat aangeeft dat de cobordismes ingekaderd zijn.

5 Oriëntatie van variëteiten

Het laatste begrip dat we nog nodig hebben om de Pontryagin-Thom-constructie uiteen te kunnen zetten is oriënteerbaarheid.

Definitie 5.1. Laat $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ en $\mathbf{b}' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ twee bases zijn van een n -dimensionale vectorruimte. Laat A de matrix zijn zodanig dat $A\mathbf{b} = \mathbf{b}'$. De twee bases $\mathbf{b}$ en $\mathbf{b}'$ hebben *dezelfde oriëntatie* als $\det(A) > 0$, en *tegenovergestelde oriëntatie* als $\det(A) < 0$.

Het hebben van dezelfde oriëntatie is een equivalentierelatie, en alle bases van een vectorruimte kunnen in twee klassen verdeeld worden. De conventie is dat als de vectorruimte $\mathbb{R}^n$ is, zodat een standaardbasis bestaat, de positief georiënteerde bases dezelfde oriëntatie hebben als de standaardbasis.

Definitie 5.2. Een parametrisatie φ van een gladde variëteit M heet *oriëntatiebehoudend* als haar afgeleide $d\varphi_u : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$ de standaardbasis voor $\mathbb{R}^m$ afbeeldt naar een positief georiënteerde basis voor $T_x M$.

Met behulp van het begrip oriëntatiebehoudend definiëren we nu wat een georiënteerde gladde variëteit is.

Definitie 5.3. Een *georiënteerde gladde variëteit* bestaat uit een gladde variëteit M , met een gekozen oriëntatie voor iedere raakruimte $T_x M$, zodanig dat de parametrisaties φ oriëntatiebehoudend zijn.

Niet iedere variëteit is oriënteerbaar. De Möbius-band is een standaardvoorbeeld van een niet-oriënteerbare variëteit. Een positieve oriëntatie van een raakruimte gaat op deze variëteit over in een negatieve oriëntatie wanneer dit punt over de variëteit verschoven wordt. Variëteiten die wel oriënteerbaar zijn hebben, mits samenhangend, precies twee mogelijke oriëntaties. Een variëteit van dimensie 0 is altijd oriënteerbaar.

Als een variëteit M een rand heeft, dan onderscheiden we drie soorten vectoren in de raakruimte $T_x M$ aan een randpunt:

1. Vectoren die raken aan de rand.
Deze vormen een m -dimensionale deelruimte $T_x(\partial M) \subset T_x M$.
2. Vectoren die ‘naar buiten wijzen’.
Deze vormen een open halfruimte begrensd door $T_x(\partial M)$.
3. Vectoren die ‘naar binnen wijzen’.
Deze vormen de complementaire gesloten halfruimte.

6 Pontryagin-variëteiten

We beginnen direct met de definitie van een Pontryagin-variëteit.

Definitie 6.1. Laat $f : M \rightarrow S^p$ een gladde afbeelding zijn op een gladde gesloten variëteit M , en laat $y \in S^p$ een reguliere waarde zijn. Lemma 3.3 geeft dat $f^{-1}(y) \subset M$ een deelvariëteit is.

Laat $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ een positief georiënteerde basis zijn voor de raakruimte $T_y S^p$. Lemma 3.5 geeft dat

$$df_x|_{T_x(f^{-1}(y))^\perp} : T_x(f^{-1}(y))^\perp \rightarrow T_y S^p$$

een isomorfisme is. Er bestaan dus unieke vectoren

$$v_i(x) \in T_x(f^{-1}(y))^\perp \subset T_x M$$

zodat $df_x(v_i(x)) = b_i(y)$. Dit geeft een inkadering v voor $f^{-1}(y)$, met notatie $v = f^*\mathbf{b}$. De ingekaderde deelvariëteit $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{b})$ heet de *Pontryagin-variëteit* van f .

Een andere keuze voor de reguliere waarde y in deze definitie, of voor de basis $\mathbf{b}$, leidt tot een andere Pontryagin-variëteit. Een afbeelding f geeft dus vele Pontryagin-variëteiten. We zullen echter zien dat deze variëteiten ingekaderd cobordant zijn met elkaar. De klasse van $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{b})$ is dus onafhankelijk van het gekozen punt y , en van de gekozen basis $\mathbf{b}$. We laten eerst de onafhankelijkheid van de gekozen basis zien.

Lemma 6.2. *Als $\mathbf{b}$ en $\hat{\mathbf{b}}$ twee positief georiënteerde bases voor $T_y S^p$ zijn, dan zijn de Pontryagin-variëteiten $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{b})$ en $(f^{-1}(y), f^*\hat{\mathbf{b}})$ ingekaderd cobordant.*

Bewijs. Reflexiviteit geeft het cobordisme, dus een inkadering vinden volstaat.

De bases $\mathbf{b}$ en $\hat{\mathbf{b}}$ kunnen we identificeren met matrices in $GL_p^+(\mathbb{R})$, de ruimte van inverteerbare $(p \times p)$ -matrices met positieve determinant. Dat is een padsamenhangende ruimte en we kiezen een glad pad $\gamma : [0, 1] \rightarrow GL_p^+(\mathbb{R})$ zodat

$$\gamma(t) = \begin{cases} \mathbf{b} & \text{voor } t \in [0, \epsilon) \\ \hat{\mathbf{b}} & \text{voor } t \in (1 - \epsilon, 1]. \end{cases}$$

Er volgt dat

$$(df_x^{-1} \circ \gamma)(t) = \begin{cases} df_x^{-1}(\mathbf{b}) & \text{voor } t \in [0, \epsilon) \\ df_x^{-1}(\hat{\mathbf{b}}) & \text{voor } t \in (1 - \epsilon, 1]. \end{cases}$$

Dit geeft de coördinaatfuncties $(df_x^{-1} \circ \gamma)_i : X \rightarrow T_x(M \times [0, 1])$ zodat

$$(df_x^{-1} \circ \gamma)_i(x, t) = \begin{cases} (f^*\mathbf{b})_i(x, 0) & \text{voor } (x, t) \in f^{-1}(y) \times [0, \epsilon) \\ (f^*\hat{\mathbf{b}})_i(x, 0) & \text{voor } (x, t) \in f^{-1}(y) \times (1 - \epsilon, 1]. \end{cases}$$

De functie $df_x^{-1} \circ \gamma$ laat zien dat $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{b})$ en $(f^{-1}(y), f^*\hat{\mathbf{b}})$ ingekaderd cobordant zijn. $\square$

De gekozen basis $\mathbf{b}$ is dus niet relevant voor de klasse van ingekaderde cobordismes van een Pontryagin-variëteit $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{b})$. De inkadering $f^*\mathbf{b}$ kan daarom vaak weggelaten worden, we noteren dan alleen $f^{-1}(y)$ voor een Pontryagin-variëteit.

We beweren nu dat twee Pontryagin-variëteiten ook bij verschillende reguliere waarden dezelfde klasse hebben van ingekaderde cobordismes. Voor het bewijs zijn een paar lemma's nodig.

Lemma 6.3. *Als y een reguliere waarde van $f : M \rightarrow S^p$ is, en $z \in S^p$ voldoende dicht bij y ligt, dan is $f^{-1}(z)$ ingekaderd cobordant met $f^{-1}(y)$.*

Bewijs. Lemma 3.6 geeft dat de verzameling van reguliere waarden in S^p open is. Er bestaat dus een ϵ -omgeving $U \subset S^p$ van y , voor een zekere $\epsilon > 0$, met alleen maar reguliere waarden voor f . Laat $z \in U$ een punt zijn in deze omgeving. Laat $r_t : S^p \times [0, 1] \rightarrow S^p$ een gladde homotopie zijn tussen de identiteit en een rotatie, zodanig dat de volgende drie eigenschappen gelden:

1. Zodanig dat

$$r_t(x) = \begin{cases} x & \text{voor } t \in [0, \epsilon') \\ r_1(x) & \text{voor } t \in (1 - \epsilon', 1]. \end{cases}$$

2. Zodanig dat $r_1(y) = z$.

3. Zodanig dat $r_t^{-1}(z) \in U$ voor alle $t \in [0, 1]$. Dit kan door de homotopie r_t zodanig te nemen dat alle punten $r_t^{-1}(z)$ op de grootst mogelijk cirkel liggen die door y en z gaat op S^p .

Definieer de homotopie $F_t(x) := (r_t \circ f)(x)$. Het punt z is een reguliere waarde van F , want $F_t^{-1}(z) = f^{-1}(r_t^{-1}(z))$, en $r_t^{-1}(z)$ is een reguliere waarde van f omdat $r_t^{-1}(z) \in U$. Er volgt dat $F_t^{-1}(z) \subset M \times [0, 1]$ een ingekaderde deelvariëteit is. We zien dat

$$F_t^{-1}(z) = \begin{cases} (f^{-1}(r_t^{-1}(z))) = f^{-1}(z) & \text{voor } t \in [0, \epsilon') \\ (f^{-1}(r_t^{-1}(z))) = f^{-1}(y) & \text{voor } t \in (1 - \epsilon', 1], \end{cases}$$

en dit laat zien dat $F_t^{-1}(z)$ een ingekaderd cobordisme is tussen $f^{-1}(z)$ en $f^{-1}(y)$. $\square$

We zullen soms nodig hebben dat twee afbeeldingen niet alleen homotoop zijn, maar dat de homotopie ertussen ook glad is voor iedere $t \in [0, 1]$. Dit noemen we glad-homotoop.

Lemma 6.4. *Als $f, g : M \rightarrow S^p$ twee glad-homotope afbeeldingen zijn, en als y een reguliere waarde is voor zowel f als g , dan is $f^{-1}(y)$ ingekaderd cobordant met $g^{-1}(y)$.*

Bewijs. Laat $F : M \times [0, 1] \rightarrow S^p$ een gladde homotopie zijn zodat

$$F_t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{voor } (x, t) \in M \times [0, \epsilon) \\ g(x) & \text{voor } (x, t) \in M \times (1 - \epsilon, 1]. \end{cases}$$

We weten uit het vorige lemma al dat er een open omgeving U_f van y bestaat met alleen maar reguliere waarden voor f . Net zo bestaat er een open omgeving U_g van y met alleen maar reguliere waarden voor g . De doorsnede $U_f \cap U_g$ is open en niet leeg, want deze doorsnede bevat y . De reguliere waarden liggen dicht in S^p , dus er bestaat een reguliere waarde $z \in U_f \cap U_g$. Het voorgaande lemma levert nu dat $f^{-1}(y)$ en $f^{-1}(z)$ ingekaderd cobordant zijn, en ook $g^{-1}(y)$ en $g^{-1}(z)$ ingekaderd cobordant zijn. Er volgt dat $F_t^{-1}(z)$ een ingekaderde variëteit is en een ingekaderd cobordisme geeft tussen $f^{-1}(z)$ en $g^{-1}(z)$. De transitiviteit van ingekaderde cobordismes impliceert nu dat $f^{-1}(y)$ ingekaderd cobordant is met $g^{-1}(y)$. $\square$

Nu zijn we klaar voor het bewijs van de eerdergenoemde bewering. Deze bewering was, in preciezere bewoording, als volgt:

Stelling 6.5. *Laat $f : M \rightarrow S^p$ een gladde afbeelding zijn op een gesloten variëteit M . Als y en z reguliere waarden zijn voor f , dan zijn de Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(y)$ en $f^{-1}(z)$ ingekaderd cobordant.*

Bewijs. Laat $r_t : S^p \times [0, 1] \rightarrow S^p$ een gladde homotopie zijn tussen de identiteit en een rotatie, zodanig dat $r_1(y) = z$. Dit geeft een homotopie tussen f en $r_1 \circ f$. Het vorige lemma geeft dat $f^{-1}(z)$ ingekaderd cobordant is met $(r_1 \circ f)^{-1}(z)$.

Met $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ r_1^{-1})(z) = f^{-1}(y)$ volgt nu dat $f^{-1}(y)$ en $f^{-1}(z)$ ingekaderd cobordant zijn. $\square$

Een afbeelding $f : M \rightarrow S^p$ geeft dus precies één klasse in $\Omega_n^{\text{fr}}(M)$.

7 Iedere variëteit is een Pontryagin-variëteit

We zullen laten zien dat iedere compacte en ingekaderde variëteit een Pontryagin-variëteit is. Voor het bewijs daarvan hebben we de Product-Omgeving-Stelling nodig, dus deze behandelen we eerst.

Stelling 7.1. (*Product-Omgeving-Stelling*)

Stel M is een gesloten variëteit met een ingekaderde en gesloten deelvariëteit $(N, v) \subset M$. Laat p de co-dimensie zijn van N , dus $p = m - n$ waarbij n en m de dimensies zijn van respectievelijk N en M . Er bestaat dan een open omgeving van N in M die diffeomorf is met $N \times \mathbb{R}^p$. Dit diffeomorfisme kan zo gekozen worden dat iedere $x \in N$ correspondeert met $(x, 0) \in N \times \mathbb{R}^p$, en zo dat iedere inkadering $v(x)$ correspondeert met de standaardbasis voor $\mathbb{R}^p$.

Voor het bewijs van deze stelling beginnen we met een afbeelding ψ en de aanname dat $M = \mathbb{R}^{n+p}$. Er worden dan eerst drie claims bewezen, daarna volgt het bewijs.

Laat $\psi : N \times \mathbb{R}^p \rightarrow M$ een afbeelding zijn die gegeven is door

$$\psi(x; t_1, t_2, \dots, t_p) = x + t_1 v_1(x) + t_2 v_2(x) + \dots + t_p v_p(x),$$

waarbij alle v_i de coördinaatfuncties zijn van de inkadering v .

Claim 1. *De afbeelding $d\psi_{(x;0,0,\dots,0)}$ is surjectief.*

Bewijs. De coördinaatfuncties $v_i(x)$ zijn per definitie glad, dus er bestaan extensies V_i van v_i , zodat $V_i(x) = v_i(x)$ voor alle $x \in N$. Met deze functies V_i definiëren we een extensie Ψ van ψ door

$$\Psi(x; t_1, t_2, \dots, t_p) := x + t_1 V_1(x) + t_2 V_2(x) + \dots + t_p V_p(x).$$

Kies een vector $(w; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in T_{(x;0,0,\dots,0)}(N \times \mathbb{R}^p)$. De definitie van de afgeleide geeft

$$\begin{aligned} d\psi_{(x;0,0,\dots,0)}(w; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi(x + sw, s\lambda_1, s\lambda_2, \dots, s\lambda_p) - \Psi(x; 0, 0, \dots, 0)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(x + sw + s\lambda_1 V_1(x + sw) + s\lambda_2 V_2(x + sw) + \dots + s\lambda_p V_p(x + sw) - x \right) \\ &= w + \lambda_1 V_1(x + sw) + \lambda_2 V_2(x + sw) + \dots + \lambda_p V_p(x + sw), \end{aligned}$$

en dit is een surjectieve afbeelding. □

Omdat $d\psi_{x;0,0,\dots,0}$ surjectief is, geeft de Inverse-Functie-Stelling vervolgens dat ψ een diffeomorfisme is op een open omgeving van $(x, 0) \in N \times \mathbb{R}^p$.

Claim 2. Voor $\epsilon > 0$ klein genoeg, is de afbeelding ψ injectief op heel $N \times U_\epsilon$, waarbij U_ϵ een ϵ -omgeving is van $0 \in \mathbb{R}^p$.

Bewijs. We bewijzen dit door middel van tegenspraak. Stel dat de afbeelding ψ niet injectief is op $N \times U_\epsilon$ voor alle $\epsilon > 0$, dan bestaan er punten $(x, u) \neq (x', u')$ in $N \times \mathbb{R}^p$, met $\|u\|$ en $\|u'\|$ willekeurig klein, zodat $\psi(x, u) = \psi(x', u')$. Laat $(x_i, u_i)_{i=0}^\infty$ en $(x'_i, u'_i)_{i=0}^\infty$ twee rijen zijn van zulke punten in $N \times \mathbb{R}^p$, die naar respectievelijk $(\hat{x}, 0)$ en $(\hat{x}', 0)$ convergeren. De convergentie ontleen we hier aan het feit dat we in een compacte metrische ruimte werken, waardoor iedere rij een convergente deelrij heeft. Er volgt dat

$$\begin{aligned} \psi(x_i, u_i) &= \psi(x'_i, u'_i) && \text{(voor alle } i, \text{ volgens aanname)} \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \psi(x_i, u_i) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \psi(x'_i, u'_i) \\ \psi(\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, u_i)) &= \psi(\lim_{i \rightarrow \infty} (x'_i, u'_i)) && \text{(continuïteit van } \psi) \\ \psi(\hat{x}, 0) &= \psi(\hat{x}', 0) \\ \hat{x} &= \hat{x}'. \end{aligned}$$

De vorige claim geeft echter dat de afbeelding ψ een diffeomorfisme is, en in het bijzonder injectief, op een omgeving van $\hat{x}$. De gekozen rijen zijn in tegenspraak met deze lokale injectiviteit rond $\hat{x}$. Dit bewijst dat ψ injectief is. $\square$

Claim 3. De omgeving U_ϵ van $0 \in \mathbb{R}^p$ is diffeomorf met $\mathbb{R}^p$.

Bewijs. De afbeelding $f : U_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^p$ gegeven door

$$u \mapsto \frac{u}{1 - (\|u\|/\epsilon)^2}$$

is een expliciet diffeomorfisme tussen U_ϵ en $\mathbb{R}^p$. $\square$

Bewijs. Bij elkaar bewijzen deze drie claims de Product-Omgeving-Stelling (Stelling 7.1) als $M = \mathbb{R}^{n+p}$, want de compositie

$$N \times U_\epsilon \xrightarrow{\psi|_{N \times U_\epsilon}} \psi|_{N \times U_\epsilon}(N \times U_\epsilon) \subset M \xrightarrow{(\text{id}_N, f)} N \times \mathbb{R}^p$$

geeft een diffeomorfisme van een omgeving van N naar $N \times \mathbb{R}^p$. $\square$

Dit bewijs kunnen we generaliseren naar algemene variëteiten door middel van geodeten. Geodeten kunnen worden opgevat als generalisaties van rechte lijnen in een Euclidische ruimte naar lijnen op een variëteit. Voor dit deel van het bewijs verwijzen we naar [1, p47], zodat we ons hier kunnen richten op het bewijzen van de volgende stelling.

Stelling 7.2. *Laat M een gesloten variëteit zijn. Iedere compacte ingekaderde deelvariëteit (N, v) van co-dimensie $p = m - n$ in M , is een Pontryagin-variëteit voor een zekere gladde afbeelding $f : M \rightarrow S^p$.*

Bewijs. De Product-Omgeving-Stelling geeft dat er een diffeomorfisme

$$\psi : N \times \mathbb{R}^p \rightarrow V$$

bestaat, waarbij $V \subset M$ een omgeving is van N .

Laat $\pi_{\mathbb{R}^p} : N \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ een projectie zijn en definieer daarmee de projectie

$$\pi := \pi_{\mathbb{R}^p} \circ \psi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

De afgeleide $d\pi_0 = d\pi_{\mathbb{R}^p,0} \circ d\psi_0^{-1}$ is surjectief, dus 0 is een reguliere waarde van π . We zien dat $\pi^{-1}(0) = \{\psi(x, 0) | x \in N\} = N$.

Laat $h_{s_0} : S^p \setminus \{s_0\} \rightarrow \mathbb{R}^p$ stereografische projectie vanuit $s_0 \in S^p$ zijn en laat $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een gladde afbeelding zijn die daalt voor $t < 1$ en constant 0 is voor $t \geq 1$. Construeer met de afbeeldingen h_{s_0} en λ een afbeelding $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow S^p$ door

$$\varphi(x) = h_{s_0}^{-1} \left(\frac{x}{\lambda(\|x\|^2)} \right).$$

Dit is een gladde afbeelding die constant s_0 is voor alle $x \in \mathbb{R}^p$ met $\|x\| \geq 1$, en een diffeomorfisme is naar $S^p \setminus \{s_0\}$ als $\|x\| < 1$.

Definieer een afbeelding $f : M \rightarrow S^p$ door

$$f(x) = \begin{cases} \varphi \circ \pi & \text{voor } x \in V \\ s_0 & \text{voor } x \notin V. \end{cases}$$

Dit is ook een gladde afbeelding. Laat $\hat{s}_0 \in S^p$ het antipodale punt van s_0 zijn, zodat $\varphi^{-1}(\hat{s}_0) = 0$. Er volgt dat $f^{-1}(\hat{s}_0) = (\pi^{-1} \circ \varphi^{-1})(\bar{s}_0) = \pi^{-1}(0) = N$. Het punt $\hat{s}_0$ is een reguliere waarde van f , want voor een willekeurig punt $x \in f^{-1}(\hat{s}_0)$ is $df_x = d\varphi_x \circ d\pi_x$ surjectief. Dit levert dat N een Pontryagin-variëteit is voor de afbeelding f . $\square$

8 Homotopieën en ingekaderde cobordismes

In Lemma 6.4 zagen we dat een homotopie een ingekaderd cobordisme impliceert. Als een Pontryagin-variëteit ingekaderd cobordant is met een andere deelvariëteit, dan weten we dat er ook een afbeelding bij die deelvariëteit hoort (Stelling 7.2). We zullen zien dat dit ingekaderde cobordisme een homotopie met deze afbeelding impliceert. We zullen dus laten zien dat de klassen van ingekaderde cobordismes $\Omega_n^{\text{fr}}(M)$ samenvallen met homotopieklassen van afbeeldingen $M \rightarrow S^p$, waarbij $0 \leq n = m - p$. We bewijzen eerst een speciaal geval. Dit is meteen het grootste deel van het werk.

Lemma 8.1. *Laat $f, g : M \rightarrow S^p$ twee gladde afbeeldingen zijn met gemeenschappelijke reguliere waarde y . Laat $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ een positief georiënteerde basis zijn voor de raakruimte $T_y S^p$. Als de ingekaderde deelvariëteiten $(f^{-1}(y), f^* \mathbf{b})$ en $(g^{-1}(y), g^* \mathbf{b})$ van M gelijk zijn, dan is f glad-homotoop met g .*

Bewijs. Laat N de notatie zijn voor de deelvariëteiten $f^{-1}(y)$ en $g^{-1}(y)$. Laat $\hat{f} : M \rightarrow S^p$ een afbeelding zijn die samenvalt met g op een omgeving V van N , oftewel $\hat{f}|_V = g|_V$, en zodat $\hat{f}^{-1}(y) = f^{-1}(y) = N$. Laat $h_y : S^p \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^p$ stereografische projectie zijn vanuit het punt y . De homotopie

$$\tilde{H}_t(x) = \begin{cases} \hat{f}(x) & \text{voor } x \in V \\ h_y^{-1}(t(h_y(g(x))) + (1-t)(h_y(\hat{f}(x)))) & \text{voor } x \in M \setminus N \end{cases}$$

laat zien dat $\hat{f}$ glad-homotoop is met g . Stel dat $\hat{f}$ ook glad-homotoop is met f door een homotopie H . De gladde homotopie tussen f en g vinden we dan door de homotopieën H en $\tilde{H}$ achter elkaar te zetten. Het doel is daarom een homotopie H te construeren tussen f en $\hat{f}$, waarbij $\hat{f}^{-1}(y) = f^{-1}(y)$.

Volgens de Product-Omgeving-Stelling bestaat er een diffeomorfisme

$$\psi : N \times \mathbb{R}^p \rightarrow \tilde{V} \subset M.$$

Hierbij is $\tilde{V} \subset M$ een open omgeving van N die zodanig klein gemaakt is dat $f(\tilde{V})$ en $g(\tilde{V})$ geen van beide het antipodale punt $\hat{y}$ van y bevatten.

Laat $h_{\hat{y}} : S^p \setminus \{\hat{y}\} \rightarrow \mathbb{R}^p$ de stereografische projectie zijn vanuit het punt $\hat{y}$. Definieer de afbeeldingen $F, \hat{F} : N \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ door

$$\begin{aligned} F(x, u) &:= (h_{\hat{y}} \circ f \circ \psi)(x, u) \\ \hat{F}(x, u) &:= (h_{\hat{y}} \circ \hat{f} \circ \psi)(x, u). \end{aligned}$$

Deze afbeeldingen F en $\hat{F}$ hebben de volgende eigenschappen.

Ten eerste is $F^{-1}(0) = \hat{F}^{-1}(0) = N \times \{0\}$. Daarnaast impliceert de aanname $f^*\mathbf{b} = g^*\mathbf{b}$ dat $df_x = dg_x$. Er volgt dat voor alle $x \in N$ geldt

$$\begin{aligned} dF_{(x,0)} &= d(h_{\hat{y}})_y \circ df_x \circ d\psi_{(x,0)} \\ &= d(h_{\hat{y}})_y \circ dg_x \circ d\psi_{(x,0)} \\ &= d(h_{\hat{y}})_y \circ d\hat{f}_x \circ d\psi_{(x,0)} \\ &= d\hat{F}_{(x,0)}. \end{aligned}$$

Tot slot is het diffeomorfisme ψ precies zo, dat de afbeelding $dF_{(x,0)}$ projectie op $\mathbb{R}^p$ is. Dit wordt duidelijk als we deze afgeleide $dF_{(x,0)}$ bekijken.

Dit is $dF_{(x,0)} : T_{(x,0)}(N \times \mathbb{R}^p) \rightarrow T_{h_{y'}(f(\psi(x,0)))}\mathbb{R}^p$ en dit komt neer op

$$dF_{(x,0)} : T_x N \oplus \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Lemma 6.2 zegt dat de klasse van ingekaderde cobordismes onafhankelijk is van de gekozen basis $\mathbf{b}$ voor $T_y S^p$. We kiezen de basis $\mathbf{b}$ opnieuw, nu zodanig dat $b_i = (d(h_{\hat{y}})_y)^{-1}(e_i)$. Laat $v = f^*\mathbf{b}$ zijn en kies $w + \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \in T_x N \oplus \mathbb{R}^p$ willekeurig. We zien dat

$$\begin{aligned} dF_{(x,0)} \left(w + \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \right) &= (d(h_{\hat{y}})_y \circ df_x \circ d\psi_{(x,0)}) \left(w + \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \right) \\ &= (d(h_{\hat{y}})_y \circ df_x) \left(d\psi_{(x,0)}(w) + \sum_{i=1}^p \lambda_i d\psi_{(x,0)}(e_i) \right) && \text{(Lineariteit van } d\psi_{(x,0)} \text{.)} \\ &= (d(h_{\hat{y}})_y \circ df_x) \left(w + \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \right) && (d\psi_{(x,0)}|_{T_x N} = \text{id}_{T_x N} \text{ en } d\psi_{(x,0)}(e_i) = v_i.) \\ &= d(h_{\hat{y}})_y \left(df_x(w) + \sum_{i=1}^p \lambda_i df_x(v_i) \right) && \text{(Lineariteit van } df_x \text{.)} \\ &= d(h_{\hat{y}})_y \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i b_i \right) && (w \in \ker(df_x) \text{ en } df_x(v_i) = b_i.) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i && \text{(Vanwege de gekozen basis } \mathbf{b} \text{.)} \end{aligned}$$

De afbeelding $dF_{(x,0)}$ is dus projectie op $\mathbb{R}^p$. Analoog vinden we dat ook de afbeelding $d\hat{F}_{(x,0)}$ projectie op $\mathbb{R}^p$ is.

De doelstelling dat $\hat{f}^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ vraagt om de volgende truc. Stel dat we kunnen laten zien dat $F(x, u) \cdot u > 0$ en $\hat{F}(x, u) \cdot u > 0$ op een omgeving

$$V_c := \{(x, u) \in N \times \mathbb{R}^p \mid 0 < \|u\| < c\}$$

van N , waarbij c een nader te bepalen constante is, dan beelden $F(x, u)$ en $\hat{F}(x, u)$ dus altijd op dezelfde kant van $\mathbb{R}^p$ af.

Dit betekent dat

$$t\widehat{F}(x, u) + (1 - t)F(x, u) > 0 \quad (8.1)$$

voor alle $t \in [0, 1]$, en daarmee is dit een homotopie die geen nieuwe nulpunten zal opleveren binnen deze omgeving V_c . Dit zal de garantie geven dat $\widehat{f}^{-1}(y) = f^{-1}(y)$. Het doel is dus te laten zien dat er een constante c bestaat waarvoor het voorgaande geldt.

Met behulp van de stelling van Taylor vinden we dat

$$\|F(x, u) - dF_{(x,0)}(x, u)\| \leq c_1 \|u\|^2$$

voor $u \in \mathbb{R}^p$ met $\|u\| \leq 1$, en een zekere constante c_1 . Het feit dat $dF_{(x,0)}$ projectie op $\mathbb{R}^p$ is maakt dat deze ongelijkheid gelijk is aan

$$\|F(x, u) - u\| \leq c_1 \|u\|^2. \quad (8.2)$$

We zien nu dat

$$\begin{aligned} 2F(x, u) \cdot u &= \|F(x, u)\|^2 + \|u\|^2 - \|F(x, u) - u\|^2 \\ &\geq \|F(x, u)\|^2 + \|u\|^2 - c_1^2 \|u\|^4 \quad (\text{Gebruik van 8.2}) \\ &\geq \|u\|^2 - c_1^2 \|u\|^4 > 0, \end{aligned}$$

voor $0 < \|u\| < \min\{\frac{1}{c_1}, 1\}$. Kortom, we zien dat $F(x, u) \cdot u > 0$ voor $0 < \|u\| < \min\{\frac{1}{c_1}, 1\}$. Geheel analoog vinden we een vergelijkbare ongelijkheid voor $\widehat{F}(x, u)$ met een constante c_2 . De constante $c := \min\left\{1, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right\}$ is precies de gewenste constante, zodat de homotopie in 8.1 geen nulpunten heeft binnen V_c .

Het is wenselijk dat punten ver van N ongemoeid worden gelaten door de homotopie. Hiervoor nemen we een gladde functie $\lambda : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ waarbij

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= 1 \quad \text{voor } \|u\| \leq c/2 \\ \lambda(u) &= 0 \quad \text{voor } \|u\| \geq c. \end{aligned}$$

Nu brengen we alle bevindingen bij elkaar. Definieer een omgeving V van N door

$$V := \{(x, u) \in N \times \mathbb{R}^p \mid \|u\| < c/2\}.$$

De homotopie $\widehat{H} : (N \times \mathbb{R}^p) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$ gegeven door

$$\widehat{H}_t(x, u) = \lambda(u)t\widehat{F}(x, u) + (1 - \lambda(u)t)F(x, u)$$

is zodanig dat

$$\widehat{H}_t(x, u) = \begin{cases} F(x, u) & \text{voor } (x, u) \in (N \times \mathbb{R}^p) \setminus V_c. \\ tF(x, u) + (1 - t)\widehat{F}(x, u) & \text{voor } (x, u) \in V_c. \end{cases}$$

De afbeeldingen $h_{\widehat{y}}$ en ψ zijn inverteerbaar, dus de gewenste homotopie $H : M \times [0, 1] \rightarrow S^p$ tussen f en $\widehat{f}$ kunnen we definiëren door

$$H_t(x) = \begin{cases} h_{\widehat{y}}^{-1} \left(\widehat{H}_t(\psi^{-1}(x)) \right) & \text{als } x \in V_c \\ f(x) & \text{als } x \in M \setminus V_c. \end{cases}$$

De twee homotopieën H en $\tilde{H}$ voegen we samen tot één gladde homotopie door concatenatie. Dit werkt als volgt. Laat $\epsilon > 0$ en laat $\omega(t) : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$ een gladde functie zijn zodanig dat

$$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \in [0, \epsilon) \\ 1 & \text{voor } t \in (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2}] \end{cases}.$$

De concatenatie van H en $\tilde{H}$, notatie $H \# \tilde{H}$, is de homotopie

$$(H \# \tilde{H})_t(x) := \begin{cases} H_{\omega(t)}(x) & \text{voor } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tilde{H}_{\omega(t-\frac{1}{2})}(x) & \text{voor } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

en dit is de gladde homotopie tussen f en g . $\square$

Het is met dit lemma nog maar weinig werk om de volgende belangrijke stelling te bewijzen.

Stelling 8.2. *Twee gladde afbeeldingen $f, g : M \rightarrow S^p$ zijn glad-homotoop, dan en slechts dan als de klassen van ingekaderde cobordismes voor f en g hetzelfde zijn.*

Bewijs. Eén richting van dit bewijs hebben we al gedaan. Als f en g glad-homotoop zijn dan geeft Lemma 6.4 dat de Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(y)$ en $g^{-1}(y)$ ingekaderd cobordant zijn.

Stel nu, voor de andere richting, dat de Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(y)$ en $g^{-1}(y)$ ingekaderd cobordant zijn. Laat (X, w) het ingekaderde cobordisme tussen $f^{-1}(y)$ en $g^{-1}(y)$ zijn.

De Product-Omgeving-Stelling garandeert dat er een diffeomorfisme bestaat

$$\psi : X \times \mathbb{R}^p \rightarrow V,$$

waarbij $V \subset M \times [0, 1]$ een omgeving is van X . Dit bewijs begint dus vergelijkbaar met dat van Stelling 7.2 en het gaat verder ook geheel analoog. Uiteindelijk geeft dit een homotopie

$$F_t : M \times [0, 1] \rightarrow S^p,$$

waarvan de Pontryagin-variëteit $(F^{-1}(y), F^*\mathbf{b})$ precies gelijk is aan (X, w) .

We zien nu dat F_0 en f precies dezelfde Pontryagin-variëteit hebben en met Lemma 8.1 volgt dat F_0 glad-homotoop is met f . Op dezelfde manier hebben F_1 en g dezelfde Pontryagin-variëteit, zodat F_1 glad-homotoop is met g . De transitiviteit van homotopieën levert nu dat f glad-homotoop is met g . $\square$

We hebben nu gezien dat er een bijectie bestaat tussen de homotopieklassen van afbeeldingen $M \rightarrow S^p$ en $\Omega_n^{\text{fr}}(M)$, waarbij $0 \leq n = m - p$. Voor de situatie $m < p$ doen we de volgende observatie.

Lemma 8.3. *Laat $f : M \rightarrow S^p$ een gladde afbeelding zijn van een m -dimensionale gladde gesloten variëteit naar de p -sfeer. Als $m < p$, dan is er slechts één homotopieklasse.*

Bewijs. Lemma 3.4 geeft dat f niet surjectief is. Laat $y \in S^p \setminus f(M)$ een punt zijn buiten het bereik van f . We gebruiken stereografische projectie $h_y : S^p \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^p$ vanuit dit punt y . De homotopie

$$h_y^{-1}((1-t)h_y(x))$$

laat nu zien dat f homotoop is met de afbeelding die constant op het antipodale punt van y afbeeldt. De dimensie m is minstens 0, dus $p > 0$. De p -sfeer met $p > 0$ is padsamenhangend, dus we concluderen dat er slechts één homotopieklasse bestaat. $\square$

We doen nog een opmerkelijke observatie. Hierbij gebruiken we de volgende classificatiestelling, die we hier niet bewijzen.

Stelling 8.4. *(Classificatie van 1-dimensionale variëteiten)*

Iedere gladde samenhangende 1-dimensionale variëteit is diffeomorf met S^1 of een interval van $\mathbb{R}$.

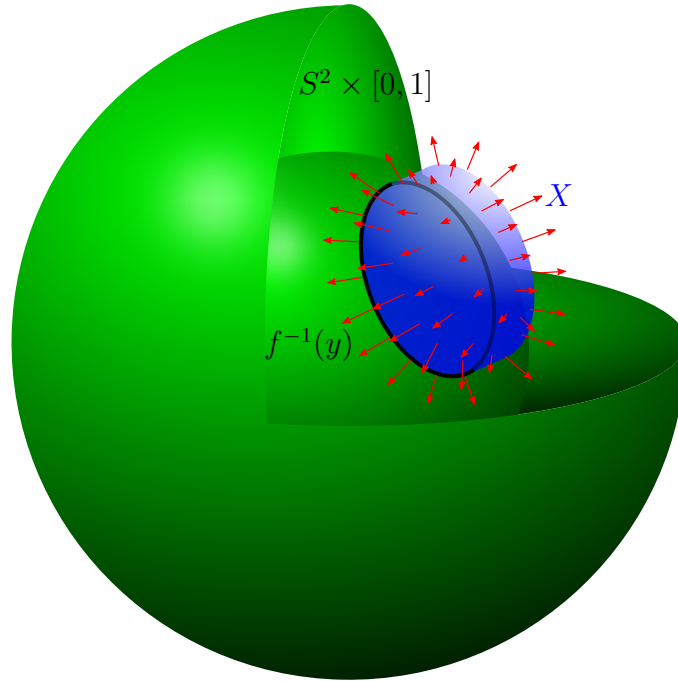
Zie [1, Appendix] voor een bewijs.

Voorbeeld 8.5. We laten zien dat alle gladde afbeeldingen $S^2 \rightarrow S^1$ glad-homotoop zijn.

Laat f en g twee gladde afbeelding van S^2 naar S^1 zijn, waarbij g constant $y_0 \in S^1$ is. Kies een reguliere waarde $y \in S^1$, met $y \neq y_0$ zodat $g^{-1}(y) = \emptyset$. Bekijk de Pontryagin-variëteit $(f^{-1}(y), v)$. Deze deelvariëteit van S^2 bestaat uit gesloten en disjuncte krommen op het oppervlak S^2 . Volgens Stelling 8.4 kunnen we deze krommen als cirkels beschouwen. Ieder van deze krommen is ingekaderd cobordant met de lege verzameling.

Figuur 8.1 laat zien hoe zo'n kromme ingekaderd cobordant is met de lege verzameling. Het cobordisme is homeomorf met een disk op S^2 , waarbij C de rand van deze disk is. Op deze manier zijn alle krommen $C \subset f^{-1}(y)$ ingekaderd cobordant met de lege verzameling. Stelling 8.2 geeft nu dat iedere gladde afbeelding $f : S^2 \rightarrow S^1$ glad-homotoop is met de constante afbeelding g . Er is dus maar één klasse in $\Omega_1^{\text{fr}}(S^2)$.

Interessant is dat dit argument voor afbeeldingen $S^3 \rightarrow S^2$ niet meer werkt. Een Pontryagin-variëteit is in dit geval weer 1-dimensionaal, maar dit keer binnen een 3-dimensionale ruimte. Dit heeft tot gevolg dat, als we een inkadering over een gesloten kromme verschuiven, de resulterende basis rondom deze kromme kan roteren. Een ingekaderd cobordisme tussen een kromme en de lege verzameling is daardoor niet altijd mogelijk.



Figuur 8.1: Een ingekaderd cobordisme X tussen de Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(y)$ en $g^{-1}(y)$ van afbeeldingen $f, g : S^2 \rightarrow S^1$. Hier is $f^{-1}(y)$ de zwarte kromme op de binnenste kopie van S^2 en $g^{-1}(y) = \emptyset$ is op de buitenste kopie van S^2 . Het cobordisme is in het blauw getekend en de rode pijlen stellen de inkadering voor.

9 De graad van een afbeelding

In hoofdstuk 10 zullen we zien hoe we de theorie met cobordismes kunnen gebruiken om de stelling van Hopf te bewijzen. De stelling van Hopf gebruikt de graad van afbeeldingen, dus dit concept behandelen we nu eerst.

De graad is een functie die aan een gladde afbeelding $M^n \rightarrow N^n$ een geheel getal toekent. Het begrip werd als eerste door de Nederlandse wiskundige L. E. J. Brouwer geïntroduceerd en geeft in zekere zin aan hoe vaak de afbeelding het domein om het codomein heen 'wikkelt'.

Definitie 9.1. Laat $f : M \rightarrow N$ een gladde afbeelding zijn tussen twee georiënteerde n -dimensionale variëteiten, waarbij M gesloten is en N samenhangend. Laat y een reguliere waarde zijn voor f . De reguliere punten $x \in f^{-1}(y)$ geven lineaire isomorfismen $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$ tussen georiënteerde vectorruimtes.

Laat $\text{sign} : f^{-1}(y) \rightarrow \{-1, +1\}$ een afbeelding zijn die gegeven is door

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} +1 & \text{als } df_x \text{ wel oriëntatiebehoudend is} \\ -1 & \text{als } df_x \text{ niet oriëntatiebehoudend is.} \end{cases}$$

De graad van f in y is

$$\deg(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(x).$$

Het volgende lemma verzekert ons dat deze sommatie eindig is.

Lemma 9.2. *Laat $f : M \rightarrow N$ een gladde afbeelding zijn tussen variëteiten van gelijke dimensie. Als M compact is en $y \in N$ een reguliere waarde, dan is $f^{-1}(y)$ een eindige verzameling.*

Bewijs. Het singleton $\{y\} \subset N$ is gesloten en de afbeelding f is continu, dus $f^{-1}(y) \subset M$ is gesloten. Een gesloten deelverzameling van een compacte ruimte is compact, dus $f^{-1}(y)$ is compact.

Samen met de Inverse-Functie-Stelling geeft de aanname dat y een reguliere waarde is, dat f een lokaal diffeomorfisme is voor alle $x \in f^{-1}(y)$. In het bijzonder is f lokaal injectief. Er volgt dat $f^{-1}(y)$ discreet is.

Een compacte en discrete verzameling is eindig, dus $f^{-1}(y)$ is eindig. $\square$

Lemma 9.3. *De graad $\deg(f, y)$ is lokaal een constante functie van reguliere waarden y .*

Bewijs. De verzameling $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bestaat uit reguliere punten. De Inverse-Functie-Stelling levert dat er voor iedere $x_i \in f^{-1}(y)$ een diffeomorfisme $f_i : U_i \rightarrow V_i$ bestaat. Hierbij is $U_i \subset M$ een omgeving van x_i en $V_i \subset N$ een omgeving van y . Laat de

omgevingen U_i bovendien paarsgewijs disjunct zijn. De verzameling

$$W := \bigcap_{i=1}^n V_i \setminus f \left(M \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i \right)$$

is nu een open omgeving van y zodanig dat voor iedere $z \in W$ het volledig origineel $f^{-1}(z)$ precies één punt uit iedere U_i bevat. Voor alle $z \in W$ geldt dus dat $\deg(f, y) = \deg(f, z)$. $\square$

Lemma 9.4. *De graad $\deg(f, y)$ is globaal een constante functie van reguliere waarden y .*

Bewijs. Neem voor ieder element $y \in N$ een open omgeving V_y waarvoor geldt dat $\deg(f, z) = \deg(f, z')$ voor alle $z, z' \in V_y$. De verzameling van reguliere waarden ligt dicht in N , dus iedere V_y bevat minstens één reguliere waarde. Er hoort dus bij iedere V_y een zekere graad.

Laat $y' \in N$ een willekeurige reguliere waarde zijn. De verzameling van alle V_y kunnen we nu verdelen in V_y waarvan de graad gelijk is aan $\deg(f, y')$ en V_y waarvan de graad ongelijk is aan $\deg(f, y')$. Dit levert twee open en disjuncte deelverzamelingen op van N , waarvan de vereniging heel N is. De verzameling N is samenhangend, dus één van de twee verzamelingen is leeg. Dit is uiteraard die met alle V_y waarvan de graad ongelijk was aan $\deg(f, y')$. $\square$

De graad is dus onafhankelijk van de reguliere waarde. Het is daarom mogelijk $\deg(f)$ te definiëren als $\deg(f, y)$, waarbij y een willekeurige reguliere waarde is voor f .

We beweren nu dat glad-homotope afbeeldingen gelijke graad hebben. Om dit te bewijzen hebben we het volgende lemma nodig.

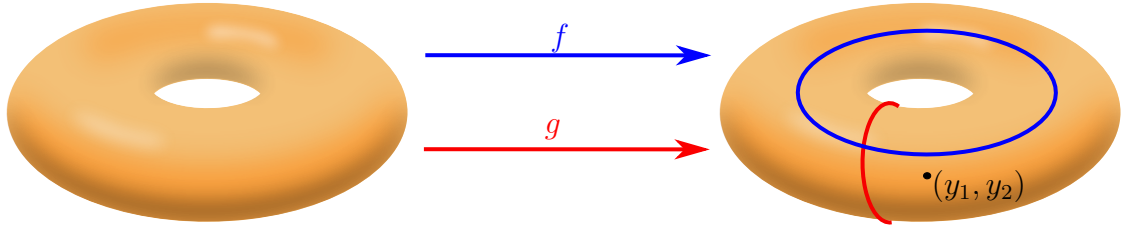
Lemma 9.5. *Laat M en N twee georiënteerde n -dimensionale variëteiten zijn. Laat M de rand zijn van een compacte georiënteerde variëteit X , en stel dat M georiënteerd is als de rand van X . Als $f : M \rightarrow N$ de restrictie is van een gladde afbeelding $F : X \rightarrow N$, dan is $\deg(f) = 0$.*

Bewijs. Kies een punt $y \in M$ dat een reguliere waarde is voor zowel f als F .

Dit is mogelijk omdat er, volgens de stelling van Sard (Stelling 3.2), een reguliere waarde voor f bestaat. Hetzelfde argument als aan het begin van het bewijs van Lemma 6.3 levert hier dat er een omgeving U_f van y bestaat met alleen maar reguliere waarden voor f . Als y toevallig ook een reguliere waarde voor F is, zijn we klaar. Als y geen reguliere waarde voor F is, dan kiezen we een ander punt in U_f dat wel regulier is voor F . Dit is mogelijk omdat de reguliere waarden dicht in N liggen.

De dimensie van X is $n + 1$, want $M = \partial X$. Lemma 3.3 geeft daarom dat $F^{-1}(y)$ een 1-dimensionale variëteit is. Deze variëteit $F^{-1}(y)$ is bovendien een gesloten deelverzameling van de compacte ruimte X en zodoende zelf ook compact. Volgens Stelling 8.4 zijn de enige 1-dimensionale variëteiten verenigingen van eindig veel disjuncte cirkels en krommen. We zien nu dat

$$\sum_{x \in \partial F^{-1}(y)} \text{sign}(x) = \deg(\partial F) = 0,$$



Figuur 9.1: Twee niet-homotope afbeeldingen met gelijke graad. Dit laat zien dat de graad in het algemeen geen volledige invariant is.

want alle x in de sommatie hierboven zijn randpunten van disjuncte georiënteerde krommen. Zodoende komen deze randpunten x in paren voor met tegengestelde waarde van $\text{sign}(x)$.

We zien ook dat $\partial F^{-1}(y) = \partial W \cap F^{-1}(y) = M \cap F^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ en we concluderen daarmee dat

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(x) = \sum_{x \in \partial F^{-1}(y)} \text{sign}(x) = 0. \quad \square$$

Met dit resultaat kunnen we de eerdergenoemde bewering bewijzen. Deze bewering was als volgt:

Lemma 9.6. *Laat $f, g : M \rightarrow N$ twee gladde afbeeldingen zijn tussen twee georiënteerde n -dimensionale variëteiten, waarbij M gesloten is. Als $f, g : M \rightarrow N$ homotoop zijn, dan is $\deg(f) = \deg(g)$.*

Bewijs. Laat $F_t : M \rightarrow N$ een homotopie zijn, zodat $F_0 = f$ en $F_1 = g$. Laat $y \in N$ een reguliere waarde zijn voor F , f en g . In feite is M nu de rand van de variëteit $M \times [0, 1]$ en Lemma 9.5 geeft daarom dat $\deg(\partial F) = 0$. We zien echter ook dat $\partial F|_{M \times \{0\}} = f$ en $\partial F|_{M \times \{1\}} = g$. De oriëntatie van $M \times \{0\}$ is tegengesteld aan die van $M \times \{1\}$. We concluderen daarom dat $\deg(\partial F) = \deg(f) - \deg(g) = 0$, dus $\deg(f) = \deg(g)$. $\square$

In het volgende hoofdstuk zullen we zien dat het omgekeerde van dit lemma, onder bepaalde voorwaarden, ook waar is. Maar in het algemeen is de graad geen volledige invariant. Er bestaan namelijk afbeeldingen met dezelfde graad, die niet homotoop zijn.

Voorbeeld 9.7. Neem twee afbeeldingen $f, g : T^2 \rightarrow T^2$ tussen torussen.

Laat $(a, b) \in S^1 \times S^1 = T^2$ een willekeurig punt zijn op de torus, en laat de afbeeldingen gegeven zijn door $f(x_1, x_2) = (x_1, b)$ en $g(x_1, x_2) = (a, x_2)$. De graad van deze afbeeldingen is 0, want we kunnen een reguliere waarde $(y_1, y_2) \in T^2 \setminus (f(T^2) \cup g(T^2))$ nemen. Oftewel: buiten het bereik van f en g , zodat $\deg(f)$ en $\deg(g)$ sommaties over lege verzamelingen zijn. Deze afbeeldingen f en g hebben dus dezelfde graad, maar ze zijn niet homotoop. Zie Figuur 9.1 voor een illustratie bij dit voorbeeld.

10 De stelling van Hopf

De stelling van Hopf is een krachtige stelling voor de topologie, want deze maakt het mogelijk om de homotopieklasse van een bepaald soort afbeeldingen simpelweg door een getal, namelijk de graad, te classificeren. We bewijzen de stelling van Hopf hier met behulp van de Pontryagin-Thom-constructie, en daarmee is dit bewijs een voorbeeld van de mogelijkheden van deze constructie.

In het bewijs zullen we gebruik maken van het volgende.

Stelling 10.1. *Als $f : M \rightarrow N$ een continue afbeelding is tussen gladde variëteiten, dan is f homotoop met een gladde afbeelding $\tilde{f} : M \rightarrow N$. Als f glad is op een gesloten deelverzameling $A \subset M$, dan kan de homotopie relatief A genomen worden.*

Zie voor een bewijs van deze stelling [3, p142]. Deze stelling is niet direct toepasbaar op variëteiten met rand. Het volgende lemma is de specifieke versie van de stelling zoals we die nodig zullen hebben.

Lemma 10.2. *Als $\gamma : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ een continu pad is, dat glad is op de gesloten deelverzameling $[0, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1] \subset [0, 1]$, waarbij $\epsilon > 0$, dan bestaat er een glad pad $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ dat homotoop is met γ relatief $[0, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1] \subset [0, 1]$.*

Bewijs. Laat $\epsilon > 0$ en laat $\omega(t) : (-\epsilon, 1 + \epsilon) \rightarrow [0, 1]$ een gladde functie zijn, zodanig dat

$$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \leq 0 \\ 1 & \text{voor } t \geq 1 \end{cases}$$

en $\omega'(t) > 0$ voor alle t . We weten dat $\gamma \circ \omega$ continu is. Stelling 10.1 impliceert nu dat $\gamma \circ \omega$ homotoop relatief $[0, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1]$ is met een gladde afbeelding $\widetilde{\gamma \circ \omega}$.

Definieer ten slotte $\tilde{\gamma}$ door de restrictie $\widetilde{\gamma \circ \omega}|_{[0,1]}$. □

We zijn nu klaar voor het hoofdonderwerp van dit hoofdstuk.

Stelling 10.3. *(Stelling van Hopf)*

Als M een m -dimensionale samenhangende, oriënteerbare, gesloten variëteit is, dan zijn twee afbeeldingen

$$f, g : M \rightarrow S^m$$

glad-homotoop, dan en slechts dan als

$$\deg(f) = \deg(g).$$

Bewijs. Bij Lemma 9.6 hebben we al één richting van dit bewijs gedaan, dus we hoeven hier alleen te bewijzen dat gelijke graad homotopie impliceert. We zullen laten zien dat gelijke graad impliceert dat Pontryagin-variëteiten ingekaderd cobordant zijn. Met Stelling 8.2 volgt dan het gewenste resultaat. We beginnen dus met de aanname dat $\deg(f) = \deg(g)$.

Stel dat $m > 1$.

We weten al, van Lemma 9.2 en Lemma 3.3, dat de Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(y)$ en $g^{-1}(y)$ eindige verzamelingen van punten zijn. Het doel is om een compacte deelvariëteit $X \subset M \times [0, 1]$ te vinden die voldoet aan de eisen van een cobordisme.

We bekijken eerst alleen $f^{-1}(y)$ en splitsen deze verzameling op in twee disjuncte delen door

$$N^- := \{x \in f^{-1}(y) \mid \text{sign}(x) = -1\}$$

en

$$N^+ := \{x \in f^{-1}(y) \mid \text{sign}(x) = 1\}.$$

Stel dat $|N^-| = k$ en $|N^+| = l$, en stel dat $k \leq l$. Kies een punt $x^+ \in N^+$ en een punt $x^- \in N^-$.

We kunnen een pad in $M \times [0, 1]$ maken dat deze punten x^+, x^- verbindt, maar zo'n pad is niet per se een variëteit. Dit is de reden dat we een omweg nemen om deelvariëteiten te construeren. Voor deze constructies van cobordismes is de eis dat $\text{sign}(x^+) \neq \text{sign}(x^-)$ nog niet van belang. Dit speelt pas een rol bij de inkadering op het cobordisme.

Laat

$$K^{m+1} := \{(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_{m+1} \in [0, 1]\}$$

een gesloten deelruimte van $\mathbb{R}^{m+1}$ zijn en kies een $\epsilon > 0$. Laat $W \subset M \times [0, 1]$ een omgeving van de punten $(x^+; \epsilon)$ en $(x^-; \epsilon)$ zijn en $\varphi : U \rightarrow W$ een parametrisatie, waarbij $U \subset K^{m+1}$ open is en convex.

Laat $u^+, u^- \in U$ de punten zijn die onder φ met respectievelijk $(x^+; \epsilon)$ en $(x^-; \epsilon)$ corresponderen, en laat $\gamma : [\epsilon, 1 - \epsilon] \rightarrow U$ een pad zijn van u^+ naar u^- dat gegeven is door

$$\gamma(t) = (t - \epsilon)u^+ + (1 - t + \epsilon)u^-.$$

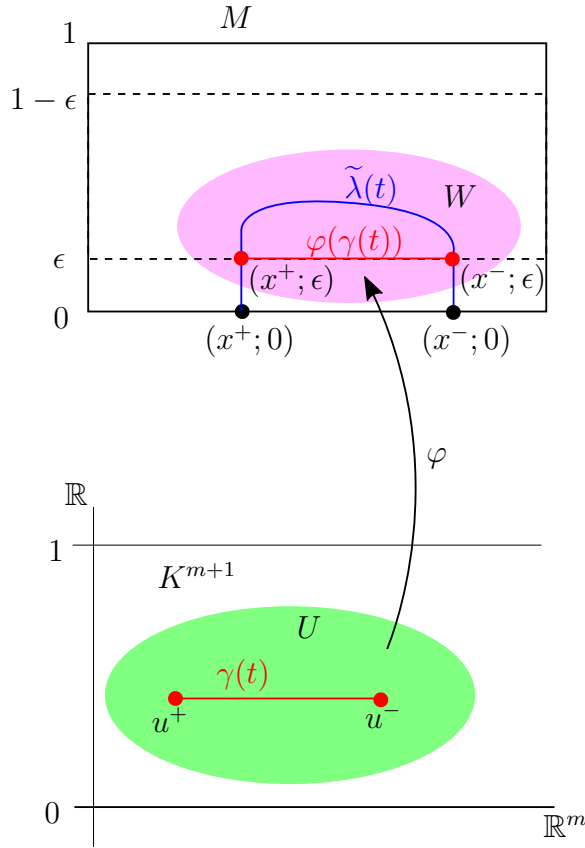
Dit pad $\gamma([0, 1])$ is een variëteit en het beeld $\varphi(\gamma([0, 1]))$ is ook een variëteit. Definieer nu een pad $\lambda : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ door

$$\lambda(t) = \begin{cases} (x^+; t) & \text{voor } t \in [0, \epsilon] \\ (\varphi \circ \gamma)(t) & \text{voor } t \in [\epsilon, 1 - \epsilon] \\ (x^-; 1 - t) & \text{voor } t \in [1 - \epsilon, 1]. \end{cases}$$

Dit pad is continu volgens het Pasting-lemma. Lemma 10.2 geeft vervolgens dat er een glad pad $\tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ bestaat tussen $(x^+; 0)$ en $(x^-; 0)$. Bovendien geeft dit lemma dat $\tilde{\lambda}$ gelijk is aan λ op $[0, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1]$.

We kiezen nu een $\epsilon' > 0$ zodanig dat

$$\tilde{\lambda}((\epsilon, 1 - \epsilon)) \cap M \times ([0, \epsilon'] \cup (1 - \epsilon', 1]) = \emptyset.$$



Figuur 10.1: De constructie van een pad in $M \times [0, 1]$ dat een cobordisme is tussen $\{x^+, x^-\}$ en de lege verzameling.

Er volgt dat $\tilde{\lambda} \subset M \times [0, 1]$ een deelvariëteit is zodanig dat

$$\{x^+, x^-\} \times [0, \epsilon'] = \tilde{\lambda} \cap M \times ([0, \epsilon'] \cup (1 - \epsilon', 1]).$$

Hiermee voldoet $\tilde{\lambda}$ precies aan de definitie van een cobordisme. We hebben dus een cobordisme tussen $\{x^+, x^-\}$ en de lege verzameling gevonden. Zie Figuur 10.1 voor een schematische weergave van deze constructie.

We construeren nu de inkadering $w(x)$. We zullen zien dat een inkadering impliceert dat $\text{sign}(x^+) \neq \text{sign}(x^-)$, en dat dit dus een noodzakelijke voorwaarde is. We gebruiken de parametrisatie voor $\tilde{\lambda}$ die we al hadden, zodat we x , en dus $w(x)$ kunnen uitdrukken in t . De inkadering van de Pontryagin-variëteit $f^{-1}(y)$ geeft een basis $\mathbf{v}^+$ voor $T_{\tilde{\lambda}(0)}(f^{-1}(y))^\perp$, en een basis $\mathbf{v}^-$ voor $T_{\tilde{\lambda}(1)}(f^{-1}(y))^\perp$.

Laat $\tilde{\lambda}'(t) = (\tilde{\lambda}'_1(t), \tilde{\lambda}'_2(t), \dots, \tilde{\lambda}'_{m+1}(t))$ de raakvector zijn aan $\tilde{\lambda}([0, 1])$. In het bijzonder is $\tilde{\lambda}'(t) \neq 0$ voor alle $t \in [0, 1]$, want de kromme $\tilde{\lambda}$ is glad. Laat $w(0) = \mathbf{v}^+$ de basis zijn voor $T_{\tilde{\lambda}(0)}\tilde{\lambda}^\perp$.

We claimen dat als $w(t_1)$ een basis is voor $T_{\tilde{\lambda}(t_1)}\tilde{\lambda}^\perp$, en als $|t_1 - t_2|$ klein genoeg is, dan is $w(t_2)$ een basis voor $T_{\tilde{\lambda}(t_2)}\tilde{\lambda}^\perp$. Dit zien we door een omgeving $W \subset M \times [0, 1]$

van $\tilde{\lambda}(t_1)$ te nemen en een parametrisatie $\varphi : U \rightarrow W$. Waarbij $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ zodanig is dat $\varphi(u_1, 0) \in W \cap \tilde{\lambda}$ voor alle $(u_1, 0) \in U$, en $\varphi(0, 0) = \tilde{\lambda}(t_1)$.

De basis $w(0)$ correspondeert onder φ met een basis μ voor $\{0\} \times \mathbb{R}^m$. We zien dat μ een basis is voor alle $\{u_1\} \times \mathbb{R}^m$. Er volgt dat $w(0)$ een basis geeft voor $T_{\tilde{\lambda}(t)}\tilde{\lambda}^\perp$ mits $\tilde{\lambda}(t) \in W$.

De compactheid van $\tilde{\lambda}$ zorgt dat we na een eindig aantal herhalingen uitkomen in het punt $(x^-, \epsilon) \in \tilde{\lambda}$, waarbij de basis voor $T_{(x^-, \epsilon)}\tilde{\lambda}^\perp$ nog steeds $w(0)$ is. Het laatste stukje van de inkadering w op $\tilde{\lambda}$, dus van (x^-, ϵ) tot $(x^-, 0)$, is zodanig dat de basis $w(1 - \epsilon)$ op een gladde manier overgaat in de basis $\mathbf{v}^-$. Om duidelijk te maken dat dit kan, delen we de functie $\tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ op in componentfuncties $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$. We gebruiken dat

$$T_{\tilde{\lambda}(t)}(M \times [0, 1]) = T_{\tilde{\lambda}_1(t)}M \oplus T_{\tilde{\lambda}_2(t)}[0, 1] \cong T_{\tilde{\lambda}_1(t)}M \oplus \mathbb{R},$$

en zien hiermee dat

$$T_{\tilde{\lambda}_1(1-\epsilon)}M \oplus T_{\tilde{\lambda}_2(1-\epsilon)}[0, 1] = T_{\tilde{\lambda}_1(1)}M \oplus T_{\tilde{\lambda}_2(1)}[0, 1]$$

dus

$$T_{\tilde{\lambda}_1(1-\epsilon)}M \oplus \mathbb{R} = T_{\tilde{\lambda}_1(1)}M \oplus \mathbb{R}.$$

We vinden hiermee dat $w(1 - \epsilon)$ een basis geeft voor de raakruimte $T_{\tilde{\lambda}_1(1-\epsilon)}M \oplus \mathbb{R}$ en $\mathbf{v}^-$ een basis voor de raakruimte $T_{\tilde{\lambda}_1(1)}M \oplus \mathbb{R}$. Het is dus mogelijk om de basis $w(1 - \epsilon)$ op een gladde manier in de basis $\mathbf{v}^-$ over te laten gaan. Dit maakt de constructie van de inkadering $w(x)$ af.

We zien dat $(w(t), \tilde{\lambda}'(t))$ een basis geeft voor $M \times [0, 1]$ die positief geïoriënteerd is voor alle $t \in [0, 1]$. We zien ook dat $\tilde{\lambda}'(0)$ de tegenovergestelde richting heeft van $\tilde{\lambda}'(1)$. Er volgt dat de oriëntatie van $w(1) = \mathbf{v}^-$ tegengesteld is aan die van $w(0) = \mathbf{v}^+$. De afgeleides df_{x^+} en df_{x^-} kunnen dus niet allebei oriëntatiebehoudend zijn en daarom moet gelden dat

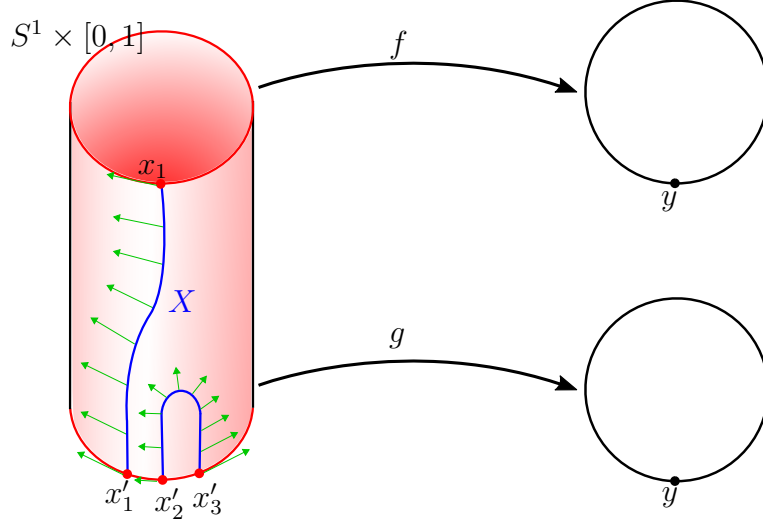
$$\text{sign}(x^+) \neq \text{sign}(x^-).$$

We hebben nu een ingekaderd cobordisme tussen $\{x^+, x^-\}$ en de lege verzameling. We herhalen dit zo vaak mogelijk. Vanwege de aanname $k \leq l$ is dat tot we alle punten uit N^- gebruikt hebben. We houden uiteindelijk $l - k$ punten uit N^+ over en noodzakelijkerwijs geldt $\deg(f) = l - k$.

Voor $g^{-1}(y)$ kunnen we hetzelfde doen. We houden dan ook een verzameling van $l - k$ punten over waarvoor $\text{sign}(x) = 1$, want $\deg(f) = \deg(g)$.

We verbinden nu ieder overgebleven punt uit $f^{-1}(y)$ met een overgebleven punt $g^{-1}(y)$ door middel van een pad. Op vergelijkbare wijze als hiervoor, zorgen we weer dat deze paden deelvariëteiten zijn van $M \times [0, 1]$. In dit geval kiezen we een omgeving W van de punten $(x^+; \epsilon)$ en $(x'^+; 1 - \epsilon)$, waarbij $x^+ \in f^{-1}(y)$ en $x'^+ \in g^{-1}(y)$. Het pad λ is nu gegeven door

$$\lambda(t) = \begin{cases} (x^+; t) & \text{voor } t \in [0, \epsilon] \\ (\varphi \circ \gamma)(t) & \text{voor } t \in [\epsilon, 1 - \epsilon] \\ (x'^+; t) & \text{voor } t \in [1 - \epsilon, 1]. \end{cases}$$



Figuur 10.2: Een ingekaderd cobordisme X tussen twee Pontryagin-variëteiten bij afbeeldingen $f, g : S^1 \rightarrow S^1$. De groene pijltjes geven de inkadering weer. De richting van zo'n pijltje correspondeert met het teken $\text{sign}(x)$ in een punt x . Dit illustreert het verband tussen een ingekaderd cobordisme en de graad van afbeeldingen.

Het argument is verder hetzelfde als hiervoor.

De raakvectoren $\tilde{\lambda}'(x^+)$ en $\tilde{\lambda}'(x'^+)$ wijzen in dit geval dezelfde kant op, met een argument analoog aan dat hiervoor, volgt dat $\text{sign}(x^+) = \text{sign}(x'^+)$ een noodzakelijke voorwaarde is voor een inkadering.

Het ingekaderde cobordisme $X \subset M \times [0, 1]$ tussen $f^{-1}(y)$ en $g^{-1}(y)$ is de vereniging van alle geconstrueerde ingekaderde cobordismen $\tilde{\lambda}_i([0, 1])$ tussen punten, dus

$$X := \bigcup_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i([0, 1]).$$

Het is essentieel dat de geconstrueerde paden paarsgewijs disjunct zijn, want bij een doorsnijding is de vereniging van paden geen variëteit meer. Voor het geval $m > 1$ is dit geen probleem. De paden $\tilde{\lambda}_i([0, 1])$ zijn immers eindig veel 1-dimensionale variëteiten in een ruimte van minstens 3 dimensies. Deze ruimte is zonder de paden $\tilde{\lambda}_i([0, 1])$ nog steeds padsamenhangend. Zodoende is er altijd een dimensie vrij om een pad in te verleggen.

Stel dat $m = 0$.

De variëteit M is volgens aanname samenhangend en zodoende een singleton, dus $M = \{x\}$. Met $\{x\} \times [0, 1]$, is $f^{-1}(y)$ op een triviale manier ingekaderd cobordant met $g^{-1}(y)$.

Stel dat $m = 1$.

Stelling 8.4 impliceert dat we nu met $M = S^1$ kunnen werken. De moeilijkheid in dit geval is dat als we een paar punten op $S^1 \times \{0\}$ verbinden met een pad, we de cilinder $S^1 \times [0, 1]$ opdelen in twee samenhangcomponenten. Alle punten die over blijven moeten in dezelfde samenhangcomponent liggen. We gebruiken het volgende stappenplan om dit te bewerkstelligen.

Identificeer S^1 met het half-open interval $[0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ door ieder punt op S^1 naar de bijbehorende hoek $\theta \bmod 2\pi$ te sturen. We zetten de verzameling $f^{-1}(y)$ op deze manier om in een rijtje $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Itereer over $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Als $\text{sign}(x_i) \neq \text{sign}(x_{i+1})$, maak dan een pad tussen x_i en x_{i+1} in $M \times [0, 1]$. Begin opnieuw met itereren, waarbij nu i en $i + 1$ overgeslagen worden. Herhaal dit voor de verzameling $g^{-1}(y)$.

Na opnieuw nummeren geeft dit de twee even grote verzamelingen $\{x_1, x_2, \dots, x_{|\deg(f)|}\}$ en $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_{|\deg(g)|}\}$. Verbind de punten uit deze twee verzamelingen door steeds een pad tussen x_i en x'_i te maken. De geconstrueerde paden zijn dankzij dit stappenplan allemaal disjunct. De vereniging van deze paden is de deelvariëteit X van $M \times [0, 1]$ zodat $f^{-1}(y)$ en $g^{-1}(y)$ cobordant zijn. Zie Figuur 10.2 voor een illustratie van dit principe. $\square$

11 Afbeeldingen naar $\bigvee_{i=1}^r S^{p_i}$

De Pontryagin-Thom-constructie zoals we die nu gezien hebben, maakt gebruik van een sfeer als codomein. We gaan de theorie nu generaliseren naar afbeeldingen

$$M \rightarrow S_1^{p_1} \vee S_2^{p_2} \vee \cdots \vee S_r^{p_r},$$

waarbij $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ en $p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ voor alle $i = 1, 2, \dots, r$. Hierbij is M weer een m -dimensionale gladde gesloten variëteit, en

$$S_1^{p_1} \vee S_2^{p_2} \vee \cdots \vee S_r^{p_r} := (S_1^{p_1} \amalg S_2^{p_2} \amalg \cdots \amalg S_r^{p_r}) / \sim$$

een disjuncte vereniging van sferen, mogelijk van verschillende dimensies, die in één punt ‘aan elkaar vastgemaakt zijn’. Dat wil zeggen, er is uit iedere sfeer een punt $\hat{y}_i \in S_i^{p_i}$ gekozen en deze punten worden door de relatie $\sim$ met elkaar geïdentificeerd. De subscript i -tjes bij $S_i^{p_i}$ zijn er om onderscheid mogelijk te maken tussen verschillende componenten uit het codomein.

In dit hoofdstuk behandelen we deze situatie algemeen. We breiden definities, lemma’s en stellingen uit naar de nieuwe situatie waar dat nodig is. In de hoofdstukken hierna zullen we specifieke gevallen bekijken, waarbij we expliciete keuzes maken voor M , r en p_i .

Merk op dat het codomein geen variëteit meer is. Een gevolg hiervan is dat we onze notie van gladheid moeten uitbreiden. Hiertoe definiëren we eerst een projectie

$$\bar{\pi}_j : \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i} \rightarrow S_j^{p_j}$$

door

$$\bar{\pi}_j(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in S_j^{p_j} \\ \bar{y}_j & \text{als } x \notin S_j^{p_j}. \end{cases}$$

Definitie 11.1. Een afbeelding $f : M \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ noemen we glad als f continu is en de compositie $\bar{\pi}_j \circ f$ glad is voor iedere $j = 1, 2, \dots, r$.

Het punt $\bar{y}_j$ waar de sferen aan elkaar zitten, bestempelen we als kritieke waarden.

We breiden de definities van een reguliere waarde, een Pontryagin-variëteit en een ingekaderd cobordisme ook uit naar de nieuwe situatie.

Definitie 11.2. Laat $f : M \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ een gladde afbeelding zijn. Een *verzameling van reguliere waarden voor f* is een verzameling $E = \{y_j\}_{j=1}^r$ van r punten, zodanig dat voor alle $j = 1, 2, \dots, r$ het punt $y_j \in E$ een reguliere waarde is voor $\bar{\pi}_j \circ f$.

Definitie 11.3. Laat $f : M \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ een gladde afbeelding zijn met E een verzameling van reguliere waarden voor f . Laat $\mathbf{b}_i$ een positief georiënteerde basis zijn voor $T_{y_i} S_i^{p_i}$, waarbij $y_i \in E$ voor $i = 1, 2, \dots, r$. Een *Pontryagin-variëteit* $(f^{-1}(E), v)$ is de vereniging van alle Pontryagin-variëteiten $(f^{-1}(y_i), f^* \mathbf{b}_i)$.

Definitie 11.4. Laat $f, g : M \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ twee gladde afbeeldingen zijn en E een verzameling van reguliere waarden voor beide. De Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(E)$ en $g^{-1}(E)$ zijn *ingekaderd cobordant* als voor alle $y_i \in E$ een ingekaderd cobordisme (X_i, w_i) tussen $f^{-1}(y_i)$ en $g^{-1}(y_i)$ bestaat en deze cobordismes X_i paarsgewijs disjunct zijn, oftewel $X_i \cap X_j = \emptyset$ voor $i \neq j$. Het ingekaderde cobordisme (X, w) tussen $f^{-1}(E)$ en $g^{-1}(E)$ bestaat uit het cobordisme $X := \bigcup_{i=1}^r X_i$ en de inkadering

$$w(x) := \begin{cases} w_1(x) & \text{als } x \in X_1 \\ w_2(x) & \text{als } x \in X_2 \\ \vdots & \\ w_r(x) & \text{als } x \in X_r . \end{cases}$$

De notatie voor deze klassen van ingekaderde cobordismes is $\Omega_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{\text{fr}}(M)$. Hierbij zijn $n_1, n_2, \dots, n_r$ de dimensies van de deelvariëteiten. Er geldt dus $n_i = m - p_i$ voor $i = 1, 2, \dots, r$.

We beweren dat een klasse in $\Omega_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{\text{fr}}(M)$ niet afhankelijk is van de gekozen reguliere waarden. Dit hebben we bij Stelling 6.5 al gezien voor het geval waarin het codomein een enkele sfeer is, maar het generaliseren van deze stelling vraagt om een paar aanpassingen in het bewijs. In Lemma 6.3 gebruikten we een rotatie, maar dit geeft nu problemen met het punt $\bar{y}$ waar sferen aan elkaar vast zitten.

Het volgende lemma is een goed alternatief. Het begrip gladde isotopie duikt hierbij op. Een gladde isotopie is een gladde homotopie zodat $H_t : S^p \rightarrow S^p$ een diffeomorfisme is voor alle $t \in [0, 1]$.

Lemma 11.5. *Als $y, z \in S^p$, dan bestaat er een gladde isotopie $H : S^p \times [0, 1] \rightarrow S^p$ en een omgeving $U \subsetneq S^p$ van y en z , zodat*

1. $H_t(x) = x$ als $t = 0$ of $x \notin U$,
2. en $H_1(y) = z$.

Bewijs. Laat $\varphi : B^p \rightarrow U$ een parametrisatie zijn, waarbij $B^p := \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq 1\}$ de eenheidsbal is en $U \subsetneq S^p$ een omgeving is van y en z . Deze parametrisatie φ kan geconstrueerd worden met behulp van stereografische projectie vanuit een punt $\bar{y} \notin U$. We gebruiken dit diffeomorfisme φ om het bewijs van S^p naar $\mathbb{R}^p$ te verplaatsen, en we construeren een gladde isotopie $F : \mathbb{R}^p \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$ die

1. alle punten buiten de eenheidsbal B^p met rust laat, en
2. de oorsprong verschuift naar een willekeurig gekozen punt in het inwendige van B^p .

Laat $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } \|x\| \geq 1 \\ e^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}} & \text{als } \|x\| < 1. \end{cases}$$

Deze functie is glad, positief op het inwendige van B^p en 0 elders. Kies een eenheidsvector $c \in S^{p-1}$ en beschouw de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \lambda(x),$$

voor $i = 1, 2, \dots, n$. Deze vergelijkingen hebben voor alle $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ een unieke oplossing $x = x(t)$ die gedefinieerd is voor alle reële getallen die voldoen aan de beginwaarde

$$x(0) = \bar{x}.$$

We gebruiken de notatie $x(t) = F_t(\bar{x})$ voor deze oplossing. We zien dat

1. $F_t(\bar{x})$ gedefinieerd is voor alle $t \in [0, 1]$ en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ en glad is ten opzichte van t en $\bar{x}$,
2. $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$ en
3. $F_{s+t}(\bar{x}) = (F_s \circ F_t)(\bar{x})$.

Er volgt dat $F : \mathbb{R}^p \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$ een gladde isotopie is tussen de identiteit F_0 en een diffeomorfisme F_1 . Dit diffeomorfisme F_1 is zodanig dat alle punten buiten de eenheidsbol B^p met rust gelaten worden. De oorsprong kan naar ieder gewenst punt in het inwendige van B^p afgebeeld worden, door een passende keuze voor c en t te maken. De compositie $H_t := \varphi \circ F_t \circ \varphi^{-1}$ maakt het bewijs af. $\square$

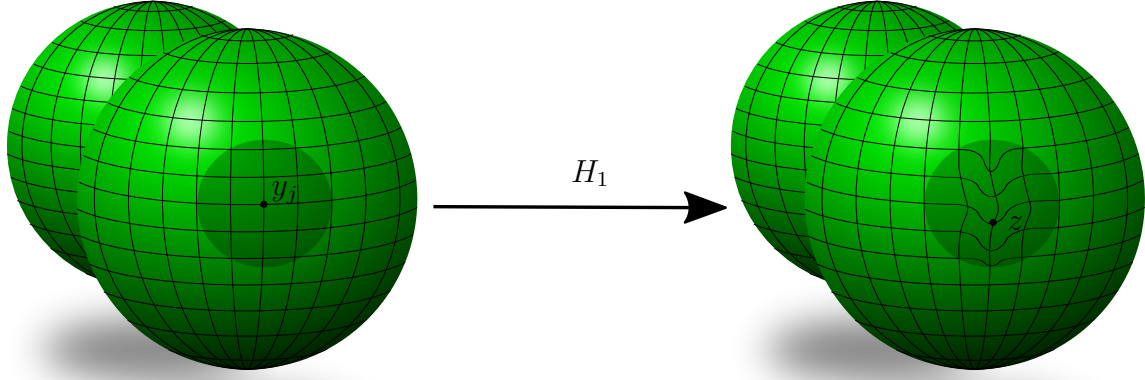
Dit lemma gebruiken we om Lemma 6.3 uit te breiden.

Lemma 11.6. *(Uitbreiding van Lemma 6.3.)*

Laat $f : M \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ een gladde afbeelding zijn en E een verzameling van reguliere waarden voor f . Laat $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ een willekeurige gefixeerde index zijn en laat E_z de verzameling E zijn waarin y_j vervangen is voor een punt $z \in S_j^{p_j}$. Laat $\mathbf{b}$ een positief georiënteerde basis voor $T_y S^p$ zijn. Als z voldoende dicht bij y_j ligt, dan zijn de Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(E)$ en $f^{-1}(E_z)$ ingekaderd cobordant.

Bewijs. Net zoals in het bewijs van Lemma 6.3 kiezen we $z \in S_j^{p_j}$ binnen een ϵ -omgeving U van y_j , die enkel reguliere waarden bevat. Met behulp van Lemma 11.5 vinden we een isotopie $H : (\bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}) \times [0, 1] \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ tussen de identiteit en een diffeomorfisme waarvoor de volgende drie eigenschappen gelden,

1.
$$H_t(x) = \begin{cases} x & \text{als } t \in [0, \epsilon) \text{ of } x \notin U \\ H_1(x) & \text{als } t \in (1 - \epsilon, 1], \end{cases}$$
2. $H_1(y_j) = z$ en



Figuur 11.1: Een homotopie $H : (S_1^2 \vee S_2^2) \times [0, 1] \rightarrow S_1^2 \vee S_2^2$ op het moment dat $t = 1$. Het donkere gedeelte is een omgeving U van y_j , en H_1 is een diffeomorfisme waarbij y_j op z terecht komt, terwijl alles buiten U hetzelfde blijft.

3. $H_t^{-1}(z) \in U$ voor alle $t \in [0, 1]$.

Zie Figuur 11.1 voor een illustratie bij deze isotopie H .

Definieer de homotopie $F_t(x) := (H_t \circ f)(x)$. Het vervolg van dit bewijs is hetzelfde als dat van Lemma 6.3. Het enige wat we extra moeten laten zien, is dat voor alle $t \in [0, 1]$ geldt

$$F_t^{-1}(z) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} f^{-1}(y_i) \cup \bigcup_{i=j+1}^r f^{-1}(y_i) \right) = \emptyset.$$

Dit doen we door middel van tegenspraak. Neem aan dat $x \in F_t^{-1}(z)$ en $x \in f^{-1}(y_i)$ voor een zekere $i \neq j$. Uit $x \in F_t^{-1}(z)$ leiden we af dat $f(x) \in S_j^{p_j}$, terwijl $x \in f^{-1}(y_i)$ impliceert dat $f(x) \notin S_j^{p_j}$. $\square$

De volgende stelling is een uitbreiding van Stelling 6.5. Lemma 11.5 komt in het bewijs weer goed van pas.

Stelling 11.7. *(Uitbreiding van Stelling 6.5.)*

Laat $f : M \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ een gladde afbeelding zijn op een gesloten variëteit M . Laat E een verzameling zijn van reguliere waarden voor f en laat $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ een willekeurige gefixeerde index zijn.

Als E_z gelijk is aan de verzameling E , waarbij y_j vervangen is voor een willekeurige reguliere waarde $z \in S_j^{p_j}$, dan zijn de Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(E)$ en $f^{-1}(E_z)$ ingekaderd cobordant.

Bewijs. Lemma 11.5 geeft een gladde homotopie $H : (\bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}) \times [0, 1] \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ tussen de identiteit en een diffeomorfisme dat y_j afbeeldt op z . Dit geeft een homotopie tussen f en $H_1 \circ f$. De rest van dit bewijs gaat analoog aan dat van Stelling 6.5. $\square$

Er volgt dat als E en E' twee verzamelingen van reguliere waarden zijn voor f , dat dan $f^{-1}(E)$ en $f^{-1}(E')$ ingekaderd cobordant zijn. Hiervoor passen we bovenstaande stelling herhaaldelijk toe. Dat dit iedere keer goed gaat met de inkadering van ieder cobordisme volgt uit Lemma 6.2. Een afbeelding $f : M \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ geeft dus precies één klasse in $\Omega_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{\text{fr}}(M)$.

Een aantal bewijzen gebruikt de Product-Omgeving-Stelling. We zorgen hier voor de benodigde aanpassing van deze stelling.

Lemma 11.8. *(Uitbreiding van de Product-Omgeving-Stelling (Stelling 7.1).)*

Stel M is een gesloten variëteit met $\bigcup_{i=1}^r (N_i, v_i)$ een vereniging van ingekaderde en gesloten deelvariëteiten $(N_i, v_i) \subset M$. Voor iedere $i = 1, 2, \dots, r$ bestaat er een diffeomorfisme

$$\psi_i : N_i \times \mathbb{R}^{p_i} \rightarrow V_i,$$

waarbij $V_i \subset M$ een omgeving is van N_i . Deze omgevingen V_i kunnen paarsgewijs disjunct gemaakt worden, zodat $V_i \cap V_j = \emptyset$ voor alle $i, j = 1, 2, \dots, r$ met $i \neq j$.

Bewijs. Per deelvariëteit (N_i, v_i) werkt de originele Product-Omgeving-Stelling. Als we de originele Product-Omgeving-Stelling toepassen per deelvariëteit N_i , dan kiezen we iedere keer een $\epsilon_i > 0$ die ‘klein genoeg’ is (zie Claim 2). Laat

$$d := \inf\{\|x - x'\| \mid x \in N_i; x' \in N_j; i, j = 1, 2, \dots, r; i \neq j\}$$

de kleinste afstand zijn tussen alle deelvariëteiten. Gebruik $\epsilon_i := \min\{\epsilon_i, d\}$ bij het toepassen van de Product-Omgeving-Stelling op de deelvariëteit (N_i, v_i) . Er volgt dat $V_i \cap V_j = \emptyset$ voor alle $j = 1, 2, \dots, r$ met $i \neq j$. Herhaling zorgt ervoor dat dit geldt voor alle i . $\square$

Stelling 11.9. *(Uitbreiding van Stelling 7.2.)*

Laat M een gesloten variëteit zijn. Iedere vereniging van compacte ingekaderde deelvariëteiten $\bigcup_{i=1}^r (N_i, v_i)$ van co-dimensies $p_i = m - n_i$ in M , is een Pontryagin-variëteit voor een zekere gladde afbeelding $f : M \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$.

Bewijs. Voor iedere $i = 1, 2, \dots, r$ geeft de Product-Omgeving-Stelling dat er een diffeomorfisme

$$\psi_i : N_i \times \mathbb{R}^{p_i} \rightarrow V_i$$

bestaat, waarbij $V_i \subset M$ een omgeving is van N_i . Met Lemma 11.8 zorgen we dat de omgevingen V_i paarsgewijs disjunct zijn.

Dit bewijs is verder voor iedere $i = 1, 2, \dots, r$ hetzelfde als dat van Stelling 7.2, maar nu moeten de stereografische projecties vanuit $\bar{y}_i \in S_i^{p_i}$ zijn. Dit levert afbeeldingen $f_i : M \rightarrow S_i^{p_i}$ op zodat $f_i^{-1}(\hat{y}_i) = N_i$, waarbij $\hat{y}_i$ steeds het antipodale punt is van $\bar{y}_i$. De afbeelding f die we zoeken definiëren we ten slotte door

$$f(x) := \begin{cases} f_i & \text{als } x \in V_i \\ \bar{y}_i & \text{als } x \notin \bigcup_{i=1}^r V_i \end{cases}$$

zodat $f^{-1}(\{\hat{y}_i\}_{i=1}^r) = \bigcup_{i=1}^r (N_i, v_i)$. $\square$

Ten slotte willen we Stelling 8.2 uitbreiden. Lemma 8.1 werkt in de nieuwe situatie nadat we Lemma 11.8 hebben toegepast op de diffeomorfismes

$$\psi_i : N_i \times \mathbb{R}^{p_i} \rightarrow \tilde{V}_i.$$

Lemma 11.10. (*Uitbreiding van Stelling 8.2.*)

Laat $f, g : M \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^{p_i}$ twee gladde afbeeldingen zijn. De Pontryagin-variëteiten bij f en g zitten in dezelfde klasse van $\Omega_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{\text{fr}}(M)$, dan en slechts dan als f en g glad-homotoop zijn.

Bewijs. Dit bewijs is vrijwel gelijk aan dat van Stelling 8.2. Het enige verschil is dat bij de diffeomorfismes

$$\psi_i : N_i \times \mathbb{R}^{p_i} \rightarrow V_i$$

gezorgd moet worden dat alle omgevingen V_i paarsgewijs disjunct zijn. Hier zorgt Lemma 11.8 weer voor. $\square$

Nu we in het algemeen naar de nieuwe situatie hebben gekeken, is het interessant om specifieke gevallen te onderzoeken.

De eerste observatie is dat uit Voorbeeld 8.5 volgt dat $\Omega_{1,1,\dots,1}^{\text{fr}}(S^2)$ uit precies één klasse bestaat. Dit betekent dat alle gladde afbeeldingen $S^2 \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^1$ homotoop zijn met elkaar.

12 Afbeeldingen van S^1 naar $S^1 \vee S^1$

We bekijken nu het specifieke geval $M = S^1$, $r = 2$ en $p_i = 1$ voor $i = 1, 2$. Kortom, we bekijken afbeeldingen

$$f : S^1 \rightarrow S_a^1 \vee S_b^1.$$

Hierbij zijn a en b labels om onderscheid mogelijk te maken tussen de verschillende componenten uit het codomein. (Hiervoor deden we dat met nummers, maar in dit geval zijn letters handiger voor deze labels.)

Een ingekaderd cobordisme (X, w) tussen twee Pontryagin-variëteiten bestaat in dit geval uit een vereniging $(X_a, w_a) \cup (X_b, w_b)$ van twee ingekaderde cobordismes. Deze moeten disjunct zijn, maar dit is niet altijd mogelijk.

Beschouw bijvoorbeeld de situatie in Figuur 12.1. De cobordismes X_a en X_b zijn in dat voorbeeld door het verwisselen van twee punten wel of niet disjunct.

Het blijkt dat dit probleem goed te omschrijven is met behulp van ‘woorden’. Laat $\{y_a, y_b\} \subset S_a^1 \vee S_b^1$ een verzameling van reguliere waarden zijn voor f , waarbij $y_a \in S_a^1$ en $y_b \in S_b^1$. Het inverse beeld $f^{-1}(\{y_a, y_b\})$ bestaat uit de vereniging van de twee disjuncte 0-dimensionale Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(y_a)$ en $f^{-1}(y_b)$. We identificeren S^1 met $[0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ door ieder punt op S^1 naar de bijbehorende hoek $\theta \bmod 2\pi$ te sturen. We vinden op deze manier een rijtje van de vorm $(x_1, x_2, \dots, x_q)$. Dit rijtje kunnen we omzetten in een ‘woord’.

Definitie 12.1. Laat L een verzameling zijn. Een *woord* w , in letters L , is een uitdrukking van de vorm $l_1^{\epsilon_1} l_2^{\epsilon_2} \dots l_q^{\epsilon_q}$ waarbij $l_i \in L$ en $\epsilon_i \in \{-1, +1\}$. Hierbij is $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de lengte van het woord.

Een rijtje $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ zetten we om in een woord door voor de letters de verzameling $L := \{a, b\}$ te definiëren en dan $x_i = a$ te laten zijn als $f(x_i) = y_a$ en $x_i = b$ als $f(x_i) = y_b$ en $\epsilon_i = \text{sign}(x_i)$ te nemen. We vinden op deze manier bijvoorbeeld $a^{-1}bab^{-1}$. Een woord is dus notatie voor een Pontryagin-variëteit $f^{-1}(\{y_a, y_b\})$.

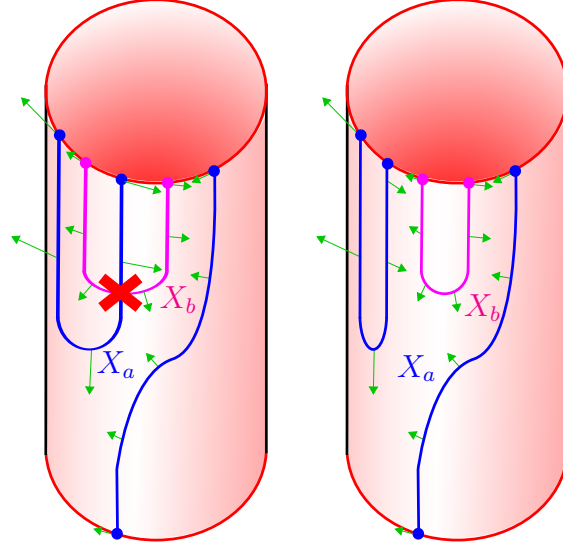
Laat $W(L)$ de verzameling zijn van alle mogelijke woorden bestaande uit de letters a en b , inclusief het lege woord (dus zonder letters). Woorden kunnen als volgt vereenvoudigd worden tot *gereduceerde woorden*.

Reductie-algoritme

Laat $l_1^{\epsilon_1} l_2^{\epsilon_2} \dots l_q^{\epsilon_q}$ een woord zijn.

Itereer over $i = 1, 2, \dots, q$ en laat $j = i + 1 \bmod (q)$ zijn.

Als $l_i = l_j$ en $\epsilon_i \neq \epsilon_j$, verwijder dan l_i en l_j uit het woord, hernummer en begin opnieuw met itereren.



Figuur 12.1: Bij afbeeldingen $S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ blijken er restricties te zijn op de volgorde van de punten in een Pontryagin-variëteit. Op de linker cilinder is geen ingekaderd cobordisme mogelijk. Op de rechter cilinder wel. Het verschil komt door het verwisselen van twee punten. Dit motiveert de aanpak met woorden in dit hoofdstuk.

Een woord $w \in W(L)$ heet *gereduceerd* als dit algoritme niets meer verandert aan het woord, en we noteren dit als $\bar{w}$.

Opmerking. Het lijkt er hier op dat we de vrije groep (zie [7, p41]) tegenkomen, zoals bij de fundamentealgroep $\pi_1(S^1 \vee S^1)$. Het verschil is echter dat we hier geen vast basispunt hebben. Hierdoor kunnen we cyclisch permuteren bij het reduceren. Dit zorgt ervoor dat de bewerking van de vrije groep (samenstelling van woorden) op $W(L)$ niet associatief is. Neem bijvoorbeeld de woorden $w_1 = ab$, $w_2 = a^{-1}$ en $w_3 = b^{-1}$. We zien dan dat $(w_1 w_2) w_3$ het lege woord oplevert, terwijl $w_1 (w_2 w_3) = aba^{-1}b^{-1}$. De bewerking van de vrije groep geeft hier dus geen groepsstructuur.

Lemma 12.2. *Als $f^{-1}(\{y_a, y_b\})$ een Pontryagin-variëteit is met woord w , dan is deze ingekaderd cobordant met de Pontryagin-variëteit $g^{-1}(\{y_a, y_b\})$ met het gereduceerde woord $\bar{w}$.*

Bewijs. Bij het reduceren van een woord worden letters verwijderd. Letters die verwijderd worden corresponderen met punten $x^+, x^- \in f^{-1}(\{y_a, y_b\})$ zodanig dat

1. beide punten uit $f^{-1}(y_a)$ komen of uit $f^{-1}(y_b)$,
2. deze punten naast elkaar liggen en
3. zodat $\text{sign}(x^+) \neq \text{sign}(x^-)$.

Het verwijderen van twee letters komt overeen met het verbinden van de bijbehorende punten door een gladde kromme in $S^1 \times [0, 1]$. De overgebleven punten $x \in f^{-1}(y_a)$ en $x \in f^{-1}(y_b)$ kunnen vervolgens verbonden worden met respectievelijk $x' \in g^{-1}(y_a)$ en $x' \in g^{-1}(y_b)$. Zie Figuur 12.2 voor een illustratie van dit principe. Alle paden zijn ingekaderde cobordismes volgens dezelfde argumenten als in het bewijs van de stelling van Hopf (Stelling 10.3). $\square$

We noemen twee woorden equivalent, notatie $\sim_\circ$, als deze woorden na reductie gelijk zijn op cyclische permutatie na. Het voorbeeld uit Figuur 12.1 laat zich nu vertalen naar woorden. Bovenaan op de linker cilinder staat het woord $a^{-1}b^{-1}aba^{-1}$. Dit is niet te reduceren en niet equivalent met het woord a^{-1} onderaan die cilinder. Bovenaan op de rechter cilinder staat het woord $a^{-1}ab^{-1}ba^{-1}$ en dit is wel equivalent aan a^{-1} . We vinden de volgende stelling.

Stelling 12.3. *Twee Pontryagin-variëteiten bij afbeeldingen van S^1 naar $S^1 \vee S^1$ zijn ingekaderd cobordant, dan en slechts dan als voor de bijbehorende woorden $w_1, w_2 \in W(L)$ geldt $w_1 \sim_\circ w_2$.*

Bewijs. Stel dat twee Pontryagin-variëteiten bij afbeeldingen van S^1 naar $S^1 \vee S^1$ ingekaderd cobordant zijn. Laat w_1 en w_2 de bijbehorende woorden zijn. Als we dit cobordisme bekijken, dan zien we dat de verzameling van deelvariëteiten met één eindpunt bij $S^1 \times \{0\}$ en het andere eindpunt bij $S^1 \times \{1\}$, precies correspondeert met de gereduceerde woorden $\bar{w}_1$ en $\bar{w}_2$. We zien ook dat $\bar{w}_1 \sim_\circ \bar{w}_2$. Er volgt dat $w_1 \sim_\circ w_2$.

Andersom zien we dat als $w_1 \sim_\circ w_2$, dan $\bar{w}_1 \sim_\circ \bar{w}_2$. Met Lemma 12.2 en associativiteit volgt dat de Pontryagin-variëteiten bij de woorden w_1 en w_2 ingekaderd cobordant zijn. $\square$

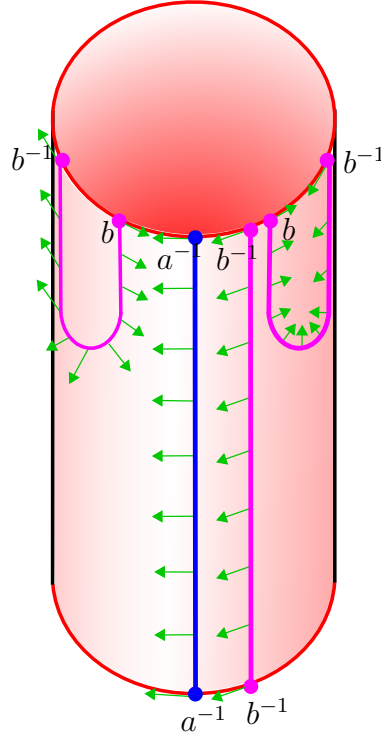
Er bestaat dus een bijectie tussen $W(L)/\sim_\circ$ en $\Omega_{0,0}^{\text{fr}}(S^1)$. In het algemeen vinden we voor iedere $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ zo'n bijectie $W(L_r)/\sim_\circ \longleftrightarrow \Omega_{0_1, 0_2, \dots, 0_r}^{\text{fr}}(S^1)$, waarbij L_r een verzameling is van r letters.

We bekijken nu wat de graad betekent bij een afbeelding $f : S^1 \rightarrow S_a^1 \vee S_b^1$. De graad $\deg(f)$ bestaat in dit geval uit hetzelfde aantal componenten als het codomein van f . We gebruiken dezelfde labels en schrijven $\deg_a(f)$ en $\deg_b(f)$. Deze zijn gedefinieerd als

$$\deg_a(f) := \sum_{x_i \in f^{-1}(y_a)} \text{sign}(x_i),$$

en idem voor $\deg_b(f)$. We zien direct dat $\deg(f) = \deg_a(f) + \deg_b(f)$.

We bekijken nog eens de linker cilinder in afbeelding 12.1. We hebben daar de woorden $w_1 = a^{-1}b^{-1}aba^{-1}$ en $w_2 = a^{-1}$. We zien dat deze woorden niet equivalent zijn, en de Pontryagin-variëteiten niet ingekaderd cobordant. We zien echter ook dat $\deg_a(f) = -1 = \deg_a(g)$ en $\deg_b(f) = 0 = \deg_b(g)$. De graad is hier dus geen volledige invariant meer. We kunnen de graad echter nog wel gebruiken als noodzakelijke voorwaarde, want als $\deg_a(f) \neq \deg_a(g)$ of $\deg_b(f) \neq \deg_b(g)$, dan is er in ieder geval geen ingekaderd cobordisme mogelijk. Bovendien kunnen we de graad gebruiken bij hogere dimensies, zoals in de volgende stelling.



Figuur 12.2: Een ingekaderd cobordisme tussen de Pontryagin-variëteit bij een woord en de Pontryagin-variëteit bij de gereduceerde versie van dit woord.

Stelling 12.4. *Twee Pontryagin-variëteiten bij afbeeldingen $S^m \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^m$ met $m > 1$ zijn ingekaderd cobordant, dan en slechts dan als voor alle $i = 1, 2, \dots, r$ geldt $\deg_i(f) = \deg_i(g)$.*

Bewijs. Voor afbeeldingen $S^m \rightarrow \bigvee_{i=1}^r S_i^m$ met $m > 1$ vinden we dat de afzonderlijke paden waaruit een cobordisme bestaat elkaar makkelijk kunnen ‘ontwijken’. Dit is net als bij het geval $m > 1$ in het bewijs van de stelling van Hopf. Direct gevolg is dat de graad in dit geval wel een volledige variant is. $\square$

13 Afbeeldingen van S^2 naar $S^1 \vee S^2$

We bekijken nu afbeeldingen

$$f : S^2 \rightarrow S_1^1 \vee S_2^2.$$

Het codomein bestaat nu dus uit componenten van verschillende dimensies. Pontryagin-variëteiten zijn hierdoor een mengeling van punten en gesloten krommen op S^2 .

Een Pontryagin-variëteit $f^{-1}(\{y_1, y_2\})$ bij reguliere waarden $y_1 \in S_1^1$ en $y_2 \in S_2^2$ is een vereniging van een 0-dimensionale Pontryagin-variëteit $f^{-1}(y_2)$ met een 1-dimensionale Pontryagin-variëteit $f^{-1}(y_1)$. Deze bestaan respectievelijk uit een verzameling punten $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, en een verzameling van simpele gesloten krommen $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$.

Laat $f^{-1}(\{y_1, y_2\})$ en $g^{-1}(\{y_1, y_2\})$ twee Pontryagin-variëteiten zijn bij afbeeldingen $f, g : S^2 \rightarrow S_1^1 \vee S_2^2$. De graad $\deg(\bar{\pi}_2 \circ f)$ is in deze situatie een bruikbare invariant. We zullen $\deg(f)$ schrijven voor $\deg(\bar{\pi}_2 \circ f)$, want dit is korter en door context net zo duidelijk.

Er is in ieder geval geen ingekaderd cobordisme mogelijk als $\deg(f) \neq \deg(g)$, want als f homotoop is aan g , dan is $\bar{\pi} \circ f$ homotoop aan $\bar{\pi} \circ g$, dus hebben f en g dezelfde graad.

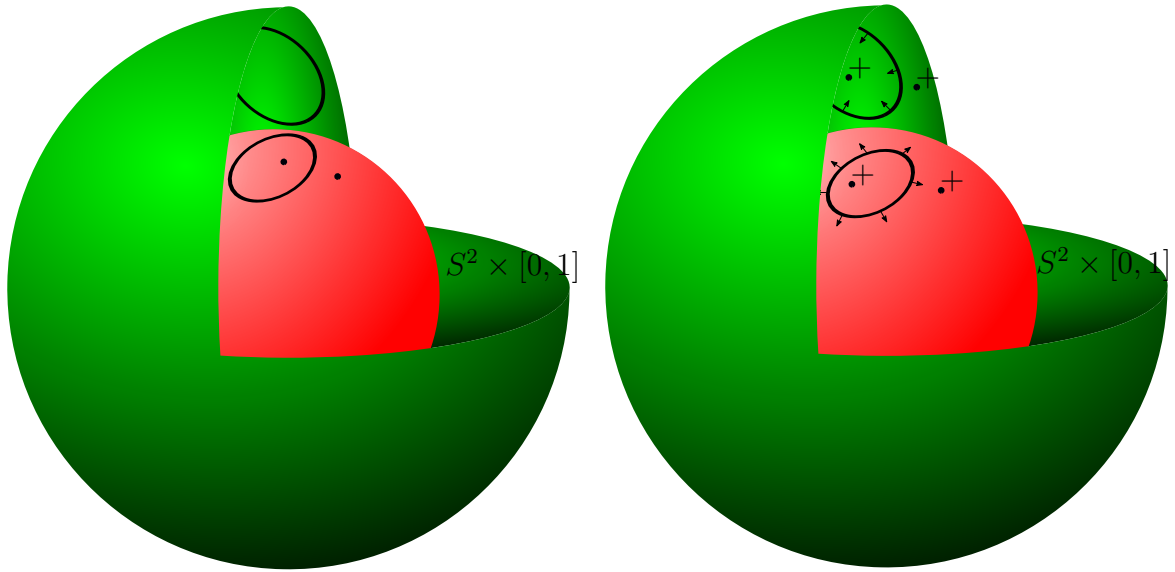
Als $\deg(f) = \deg(g)$, dan zijn er verschillende mogelijkheden voor het 2-dimensionale cobordisme X_1 en het 1-dimensionale cobordisme X_2 , maar niet iedere combinatie werkt.

Voorbeeld 13.1. Aan de linkerkant in Figuur 13.1 is een combinatie van 0- en 1-dimensionale deelvariëteiten te zien, die afzonderlijk cobordant zijn, maar niet samen.

Er is duidelijk een cobordisme te vinden tussen de punten. Er is ook duidelijk een cobordisme mogelijk tussen de krommen. Deze laatste verdeeld $S^2 \times [0, 1]$ echter in twee samenhangscomponenten, die allebei één punt bevatten. De combinatie van cobordismes is hierdoor onmogelijk, want deze cobordismes zullen elkaar altijd ergens doorsnijden.

Voorbeeld 13.2. Aan de rechterkant in Figuur 13.1 is nog een combinatie van twee Pontryagin-variëteiten te zien, die alleen afzonderlijk cobordant zijn. Er is, net als in het voorbeeld hiervoor, duidelijk een ingekaderd cobordisme te vinden tussen de punten, en ook tussen de krommen. De doorsnijding van deze cobordismes zal echter niet leeg zijn, dus de combinatie is onmogelijk.

Als een combinatie van een 1-dimensionaal met een 2-dimensionaal cobordisme ongeldig is, omdat ze elkaar ergens doorsnijden, dan is het misschien mogelijk om één van de twee, of desnoods beide cobordismes, op een andere manier te vormen, zodat de combinatie wel geldig is. In de gegeven voorbeelden levert het niets op om andere cobordismes te zoeken, maar dit is niet altijd direct duidelijk. Dit leidt tot de vraag of er een invariant bestaat die aangeeft of een ingekaderd cobordisme tussen twee Pontryagin-variëteiten mogelijk is. We beginnen met een invariant voor een deelprobleem.



Figuur 13.1: Twee voorbeelden van Pontryagin-variëteiten waartussen geen ingekaderd cobordisme mogelijk is. Het probleem in de situatie rechts komt door de inkadering op de krommen. In de linkersituatie is zelfs überhaupt geen cobordisme mogelijk, ongeacht de inkadering.

Kies twee punten $x_1, x_2 \in f^{-1}(y_2)$, waarbij $\text{sign}(x_1) = -1$ en $\text{sign}(x_2) = 1$. Laat $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^2$ een pad zijn van x_1 naar x_2 , zodanig dat $\|\gamma'(t)\| > 0$ voor alle $t \in [0, 1]$. Bekijk de doorsnijding $\gamma \cap f^{-1}(y_1)$ van dit pad met alle krommen. We willen doorsnijdingen waarbij het pad raakt aan de kromme uitsluiten. Hiervoor gebruiken we het begrip transversaliteit, zie [2, Hfdst 4], waarmee het mogelijk is om, door eventueel het pad γ een klein beetje te vervormen, een ‘transversale doorsnijding’ $\gamma \cap f^{-1}(y_1)$ te krijgen. Dit betekent dat $\gamma \cap f^{-1}(y_1)$ eindig is, en in iedere doorsnijding geldt dat $\gamma'(t) \cdot v(x) \neq 0$, waarbij t zodanig is dat $\gamma(t) = x$ en v de inkadering is op $f^{-1}(y_1)$. We nemen vanaf hier bij alle paden aan dat ze deze eigenschappen hebben.

We definiëren nu een functie $\cap\text{-sign} : \gamma \cap f^{-1}(y_1) \rightarrow \{-1, 1\}$ die aan iedere doorsnijding een waarde koppelt door

$$\cap\text{-sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{als } \gamma'(t) \cdot v(x) < 0 \\ -1 & \text{als } \gamma'(t) \cdot v(x) > 0 \end{cases}.$$

Hiermee definiëren we de functie

$$\Gamma(f, \gamma) := \sum_{x \in \gamma \cap f^{-1}(y_1)} \cap\text{-sign}(x).$$

Het pad γ in $\Gamma(f, \gamma)$ is afhankelijk van het gekozen beginpunt x_1 en eindpunt x_2 . Het volgende lemma laat zien dat dit pad verder geheel willekeurig is.

Lemma 13.3. *Het getal $\Gamma(f, \gamma)$ is onafhankelijk van het gekozen pad γ tussen x_1 en x_2 .*

Bewijs. Kies een willekeurig pad γ met als beginpunt x_1 en eindpunt x_2 . Dit pad doorsnijdt een aantal krommen. Als het pad γ meerdere doorsnijdingen heeft met een kromme C , dan geldt voor twee opeenvolgende doorsnijdingen dat hun bijdrage wegvalt in de sommatie $\Gamma(f, \gamma)$. Oftewel, als $\gamma(t_1) = \hat{x}_1$ en $\gamma(t_2) = \hat{x}_2$, waarbij $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \gamma \cap C$, en $\gamma(t) \cap C = \emptyset$ voor alle $t_1 < t < t_2$, dan geldt dat $\cap\text{-sign}(\hat{x}_1) + \cap\text{-sign}(\hat{x}_2) = 0$. Een even aantal doorsnijdingen met een kromme C levert daarom geen bijdrage aan de sommatie $\Gamma(f, \gamma)$.

Als het pad γ een oneven aantal doorsnijdingen heeft met een kromme C , dan is alleen de eerste (of laatste) doorsnijding van belang. De rest van de doorsnijdingen is een even aantal en levert, zoals al opgemerkt, geen bijdrage aan de sommatie $\Gamma(f, \gamma)$.

Verder zien we dat als het pad γ een oneven aantal doorsnijdingen heeft met een kromme C , dat de punten x_1 en x_2 ieder aan een andere kant van deze kromme liggen. Hiermee bedoelen we dat de kromme C het domein S^2 in twee samenhangscomponenten verdeelt, en dat de punten x_1 en x_2 niet in dezelfde samenhangscomponent liggen. De krommen zijn allemaal gesloten, dus ieder pad tussen x_1 en x_2 zal deze kromme minstens één keer doorsnijden, en in ieder geval een oneven aantal keer. Er volgt dat de sommatie $\Gamma(f, \gamma)$ voor ieder pad γ hetzelfde getal oplevert. $\square$

Het gevolg van dit resultaat is dat we $\Gamma(f, x_1, x_2) := \Gamma(f, \gamma)$ kunnen definiëren, waarbij γ een willekeurig pad van x_1 naar x_2 is, en $\text{sign}(x_1) = -1$ en $\text{sign}(x_2) = 1$.

Het volgende lemma toont de bruikbaarheid van dit getal $\Gamma(f, x_1, x_2)$.

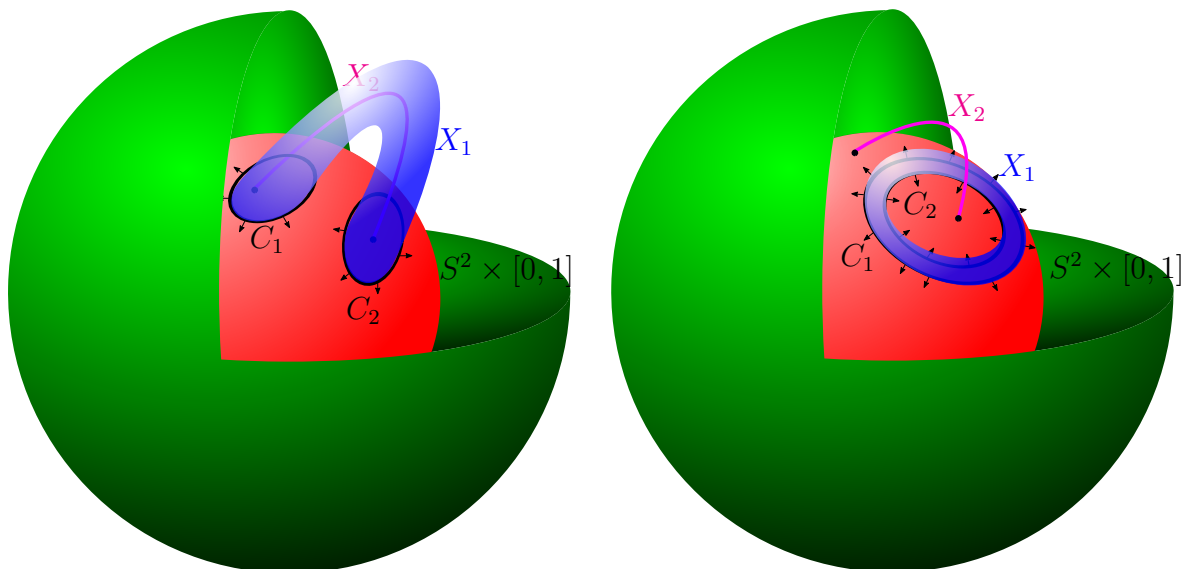
Lemma 13.4. *Laat $x_1, x_2 \in f^{-1}(y_2)$ twee punten zijn, zodanig dat $\text{sign}(x_1) = -1$ en $\text{sign}(x_2) = 1$. Er bestaat een ingekaderd cobordisme X_2 tussen de punten x_1 en x_2 , en een ingekaderd cobordisme X_1 tussen alle krommen $f^{-1}(y_1)$, zodanig dat de doorsnijding $X_1 \cap X_2$ leeg is, dan en slechts dan als $\Gamma(f, x_1, x_2) = 0$.*

Bewijs. Stel dat $\Gamma(f, x_1, x_2) = 0$. Kies een pad γ van x_1 naar x_2 en bekijk de verzameling $\gamma \cap f^{-1}(y_1)$. Het domein $[0, 1]$ van γ geeft een volgorde op deze verzameling, zodat we een rijtje van krommen krijgen. Sommige krommen uit $f^{-1}(y_1)$ komen vaker in dit rijtje voor, andere slechts eenmaal of helemaal niet. We gaan dit rijtje eerst reduceren door het pad te vervormen.

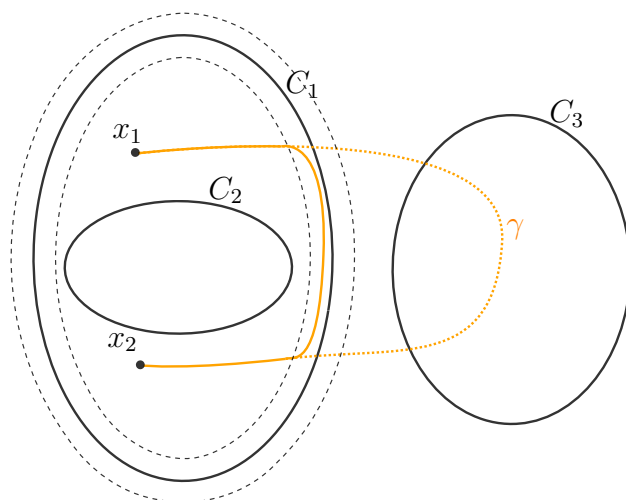
Stel dat er krommen zijn die een even aantal keer in het rijtje voorkomen. Laat C_i de eerste kromme zijn, die een even aantal keer voorkomt in het rijtje. De punten x_1 en x_2 liggen in dit geval aan dezelfde kant van deze kromme. Deze kromme C_i verdeelt het domein S^2 in twee samenhangscomponenten, en er is dus een samenhangscomponent waar deze punten geen van beide in liggen.

We vervormen het pad nu zodanig, dat de doorsnede van dit pad met die samenhangscomponent waar de punten niet in liggen leeg is. Door dit vervormde pad dicht genoeg langs de kromme C_i te laten lopen, ontstaan er geen nieuwe doorsnijdingen. Zie Figuur 13.3 voor een schets van deze situatie. Op deze manier werken we alle krommen weg die een even aantal keer in het rijtje voorkwamen.

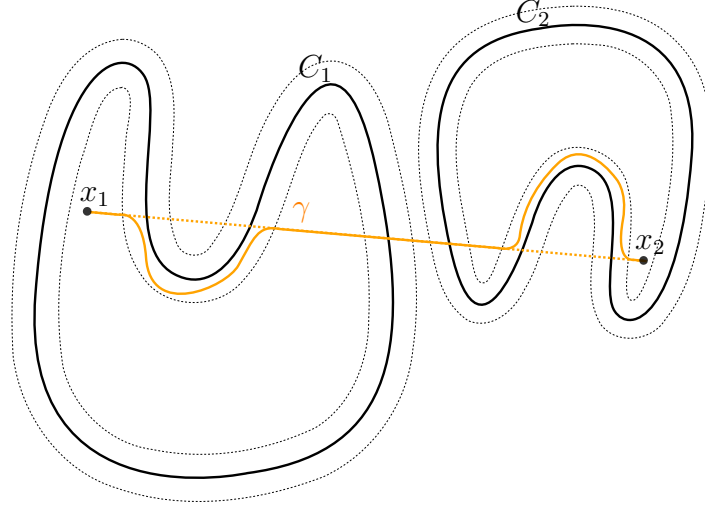
We houden een rijtje over waarin iedere kromme een oneven aantal keer voorkomt. We vervormen het pad nogmaals. Deze keer om het aantal doorsnijdingen met iedere



Figuur 13.2: Twee voorbeelden van twee cobordismes X_2 (in roze) en X_1 (in blauw). Het cobordisme X_2 is tussen een verzameling van twee punten en de lege verzameling. Het cobordisme X_1 is tussen een verzameling van twee gesloten krommen en de lege verzameling. Deze cobordismes zitten zijn disjunct.



Figuur 13.3: Het pad γ doorsnijdt de krommen C_1 en C_2 allebei een even aantal keer. De eerste doorsnijding is met C_1 . We vervormen het pad γ tot een korter pad. Dit kortere pad doorsnijdt C_1 niet, en als gevolg ook C_2 niet. De zwarte stippellijnen geven een omgeving weer van C_1 , waarbinnen geen andere krommen zijn. Het kortere pad wijkt alleen binnen deze omgeving af van het originele pad, en daardoor komen er geen nieuwe doorsnijdingen bij.



Figuur 13.4: Het pad γ doorsnijdt de krommen C_1 en C_2 allebei een oneven aantal keer. We vervormen het pad γ tot een pad dat precies één doorsnijding heeft met de kromme C_1 en één doorsnijding heeft met de kromme C_2 . De zwarte stippellijnen geven omgevingen weer waarbinnen geen andere krommen zijn. Door alleen binnen deze omgevingen van het originele pad af te wijken, voorkomen we dat er nieuwe doorsnijdingen ontstaan.

kromme terug te brengen tot één. Het vervormde pad laten we weer zodanig dicht langs de krommen lopen, dat er geen nieuwe doorsnijdingen bijkomen. Zie Figuur 13.4 voor een schets van deze situatie.

Het resultaat is een rijtje waarin iedere kromme slechts één keer voorkomt. Van iedere kromme C_i uit dit overgebleven rijtje berekenen we vervolgens $\cap\text{-sign}(x)$, waarbij $x \in C_i \cap \gamma$. We vinden, na hernummeren, een rijtje van de vorm

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s$$

waarin $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ voor alle $i = 1, 2, \dots, s$. Uit de aanname dat $\Gamma(f, x_1, x_2) = 0$, volgt dat dit rijtje net zo vaak een 1 bevat als een -1 .

Als $\epsilon_i + \epsilon_{i+1} = 0$, dan maken we een ingekaderd cobordisme tussen de verzameling van de bijbehorende krommen $\{C_i, C_{i+1}\}$ en de lege verzameling. Typische vormen voor deze cobordismes zijn geïllustreerd in Figuur 13.2. De voorwaarde $\epsilon_i + \epsilon_{i+1} = 0$ voorkomt dat we krommen ‘insluiten’. Nadat we een ingekaderd cobordisme hebben gemaakt, verwijderen we C_i en C_{i+1} uit het rijtje met krommen, en verwijderen we ϵ_i en ϵ_{i+1} . Na hernummeren zoeken we vervolgens opnieuw twee krommen waarbij $\epsilon_i + \epsilon_{i+1} = 0$.

Op deze manier werken we het overgebleven deel van het rijtje met krommen weg. Uiteindelijk vinden we op deze manier een ingekaderd cobordisme X_2 tussen de punten $\{x_1, x_2\}$ en de lege verzameling, en een ingekaderd cobordisme X_1 tussen alle krommen $f^{-1}(y_1)$ en de lege verzameling, zodanig dat de doorsnijding $X_1 \cap X_2$ leeg is.

De andere richting van het bewijs begint met de aanname dat de zojuist genoemde ingekaderd cobordismes bestaan. Beschouw het cobordisme X_2 als pad in $S^2 \times [0, 1]$.

Laat $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^2 \times \{0\}$ een pad zijn van x_1 naar x_2 . Laat $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^2 \times [0, 1]$ een homotopie zijn zodat

$$H_t(x) = \begin{cases} X_2 & \text{voor } t = 0 \\ \gamma & \text{voor } t = 1. \end{cases}$$

Stel dat $H_t \cap X_1 = x$ voor een zekere t , dan heeft deze doorsnijding een teken $\cap\text{-sign}(x)$. (Hier gebruiken we het 3-dimensionale analogon van $\cap\text{-sign}(x)$.)

Het cobordisme X_1 verdeelt $S^2 \times [0, 1]$ echter in samenhangscomponenten, en de punten x_1 en x_2 liggen in dezelfde samenhangscomponent. De gevonden doorsnijding zal daarom gepaard gaan met een doorsnijding met omgekeerd teken $\cap\text{-sign}(x)$. De doorsnijdingen komen dus in paren met tegengestelde tekens. Het gevolg is dat $\Gamma(f, x_1, x_2) = 0$. $\square$

We hebben nu een manier om te zien of een ingekaderd cobordisme tussen een verzameling $\{x_1, x_2, C_1, C_2, \dots, C_m\}$ van twee punten en m krommen, en de lege verzameling mogelijk is. We kunnen dus al sommige niet-triviale afbeeldingen identificeren als nulhomotoop. We weten echter nog steeds niets over ingekaderde cobordismes tussen zo'n verzameling en andere, niet-lege verzamelingen. Het volgende voorbeeld toont dit aan.

Voorbeeld 13.5. In het geval dat $\Gamma(f, x_1, x_2) \neq 0$, en er dus geen ingekaderd cobordisme tussen de punten $\{x_1, x_2\}$ en de lege verzameling mogelijk is, kunnen we niet concluderen dat er helemaal geen ingekaderd cobordisme mogelijk is. In Figuur 13.5 zien we een voorbeeld van een situatie waar $\Gamma(f, x_1, x_2) \neq 0$, en $\Gamma(g, x'_1, x'_2) \neq 0$, terwijl er wel degelijk een ingekaderd cobordisme mogelijk is tussen de Pontryagin-variëteiten, want deze zijn hetzelfde.

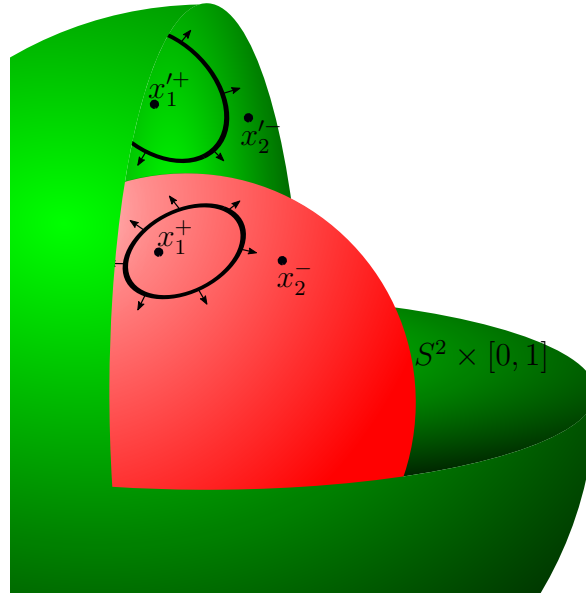
Dit voorbeeld geeft aan dat we een variant nodig hebben op Lemma 13.4, waarin we op een andere manier gebruik maken van $\Gamma(f, x_1, x_2)$. Een goed idee hiervoor is vermoedelijk het volgende.

Lemma 13.6. (*Vermoeden.*)

Laat $f, g : S^2 \rightarrow S^1_1 \vee S^2_2$ twee gladde afbeeldingen zijn met Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(\{y_1, y_2\})$ en $g^{-1}(\{y_1, y_2\})$. Laat $x \in f^{-1}(y_2)$ en $x' \in g^{-1}(y_2)$ zodanig zijn dat $\text{sign}(x) = \text{sign}(x')$. Laat $\hat{x}, \hat{x}' \in S^2$ de antipodale punten zijn van respectievelijk x en x' .

Als $\Gamma(f, x, \hat{x}) = \Gamma(g, x', \hat{x}')$, dan is een ingekaderd cobordisme X_2 mogelijk tussen deze punten, en een ingekaderd cobordisme X_1 tussen $f^{-1}(y_1)$ en $g^{-1}(y_1)$, zodanig dat de doorsnijding $X_1 \cap X_2$ leeg is.

Het idee voor het bewijs is ruwweg als volgt. Laat γ een willekeurig pad zijn van x naar $\hat{x}$, en δ een willekeurig pad van x' naar $\hat{x}'$. Stel dat $\Gamma(f, x, \hat{x}) = \Gamma(g, x', \hat{x}') = k$, waarbij $k \in \mathbb{Z}$. Dit betekent dat er $|k|$ krommen C zijn in $f^{-1}(y_1)$ en $|k|$ krommen C' in $g^{-1}(y_1)$, zodanig dat de doorsnijdingen $\gamma \cap C$ en $\delta \cap C'$ oneven zijn. Bovendien volgt dat de inkadering van deze krommen C en C' overeen komen. We kunnen daarom $|k|$ ingekaderde cobordismes maken, één voor ieder paar van krommen, door steeds C_i en C'_i cobordant te maken.



Figuur 13.5: Een voorbeeld van Pontryagin-variëteiten waartussen wel een ingekaderd cobordisme mogelijk is.

De vraag is of dit te generaliseren is naar verzamelingen met meerdere punten. Met Lemma 13.4 en Lemma 13.6 kunnen we proberen om paren van punten te vinden in $f^{-1}(\{y_2\}) \cup g^{-1}(\{y_2\})$ die aan de eisen in de lemma's voldoen. Als we alle ingekaderde cobordismes die we op deze manier vinden combineren, dan vinden we misschien een ingekaderd cobordisme tussen de twee Pontryagin-variëteiten $f^{-1}(\{y_1, y_2\})$ en $g^{-1}(\{y_1, y_2\})$. Het is echter nog niet duidelijk hoe deze cobordismes gecombineerd dienen te worden, en of hierbij nieuwe problemen ontstaan.

14 Discussie

Aan de basis van de Pontryagin-Thom-constructie liggen een aantal abstracte begrippen, die een gedegen introductie vereisen. In het bijzonder zijn dat inkaderingen en cobordismes. Dit resulteerde in een uitgebreide aanloop, waarin we allerlei definities opstapelden en belangrijke eigenschappen behandelden van de geïntroduceerde begrippen.

De kern van de constructie kwam hierdoor pas later aan bod, vanaf hoofdstuk 6. Ondanks de gedegen aanloop werden sommige bewijzen evengoed vrij lang en technisch, bijvoorbeeld bij Stelling 7.2 en Lemma 8.1. Het bewijs van de stelling van Hopf werd door de aandacht voor bepaalde details ook vrij uitgebreid.

In hoofdstuk 11 introduceerden we een nieuwe situatie, waarbij het codomein van de afbeeldingen uit meerdere sferen bestond, die in één punt ‘aan elkaar geplakt’ zaten. We gingen de besproken theorie uit de eerste acht hoofdstukken vervolgens af om de precieze verschillen te vinden met deze nieuwe situatie.

Eén verschil dat we hierbij vonden, was de noodzaak dat cobordismes disjuncte verenigingen van deelcobordismes moesten worden. In sommige gevallen leverde dit interessante problemen op. In de laatste twee hoofdstukken onderzochten we zulke problemen.

In hoofdstuk 12, over afbeeldingen van S^1 naar $S^1 \vee S^1$, vonden we een interessante oplossing: door Pontryagin-variëteiten om te zetten in woorden, en woorden onderling te vergelijken, konden we bepalen of een ingekaderd cobordisme mogelijk was.

In hoofdstuk 13 keken we naar afbeeldingen van S^1 naar $S^1 \vee S^2$. De vraag was weer hoe we konden bepalen wanneer ingekaderde cobordismes mogelijk waren. Dit bleek lastiger dan verwacht. Aanvankelijk onderzochten we een oplossingsmethode waarbij het domein S^2 door stereografische projectie vanuit een punt x , naar $\mathbb{R}^2$ werd vertaald. De informatie over de Pontryagin-variëteiten, met name de relatieve posities van de punten en krommen, zetten we daarna om in een graaf. Vervolgens probeerden we om vanuit deze graaf algoritmisch een ingekaderd cobordisme te vinden.

Dit idee sneuvelde toen duidelijk werd hoe de structuur van de graaf van het gekozen punt x afhing. De uitwerkingen van dit idee zijn daarom niet in de scriptie terecht gekomen, maar het huidige idee ontstond hierdoor wel.

Bij het huidige idee keken we naar een pad tussen twee punten, en de doorsnijdingen van dit pad met krommen. Hiermee wisten we een deelprobleem op te lossen. Wellicht is dit een aanzet tot een volledige oplossing, maar op dit moment is niet helemaal duidelijk wanneer Pontryagin-variëteiten bij afbeeldingen S^1 naar $S^1 \vee S^2$ ingekaderd cobordant zijn. Met meer goede ideeën en wiskundig werk is dit hoogstwaarschijnlijk wel op te lossen.

Bibliografie

- [1] Milnor, J. (1965). *Topology from the Differential Viewpoint*. Charlottesville, Verenigde Staten; The University Press of Virginia.
- [2] Guillemin, V., & Pollack, A. (1974). *Differential Topology*. New Jersey, Verenigde Staten; Prentice-Hall.
- [3] Lee, J. (2000). *Introduction to Smooth Manifolds*. Seattle, Verenigde Staten; Springer.
- [4] Bosshardt, J. (2011, 26 augustus). *The Hopf Degree Theorem* [pdf]. Geraadpleegd van <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Bosshardt.pdf>
- [5] DeVito, J. (2010, 27 maart). *A small question about hopf theorem* [Online Forum Bericht]. Bericht geplaatst op <https://mathoverflow.net/questions/19485/a-small-questions-about-hopf-theorem>
- [6] Kosinski, A. (1993). *Differential Manifolds*. San Diego, Verenigde Staten; Academic Press.
- [7] Hatcher, H. (2001). *Algebraic Topology*. Cambridge, Verenigd Koninkrijk; Cambridge University Press.
- [8] Edwards, C. (1973). *Advanced Calculus of Several Variables*. New York, Verenigde Staten; Dover Publications, Inc.
- [9] Yang, X. (2017, 3 juni). *Algebraic Topology July 2016 Uchicago Cobordism 1 (Inna Zakharevich)* [YouTube]. Geraadpleegd van <https://www.youtube.com/watch?v=G4IfhH9oBvw&t=2739s>