NB. Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan, maar geen programmeerbare/grafische rekenmachine, mobiele telefoon of laptop. Succes!

Normering: 1a) 3, 1b) 3, 1c) 3, 2a), 2b) 3, 2c) 3, 3a) 3, 3b) 3, 3c) 3.

Vraag 1 *(Markov modellen)*
Surfgedrag – het verkeer tussen webpagina's – op het internet wordt met een 1^{ste} orde Markov keten gemodelleerd. Zij N het totaal aantal bekende webpagina's. Beschouw een webpagina met k links. Hierbij mag een webpagina naar zichzelf linken. De kans om van deze webpagina naar een van zijn gelinkte danwel ongelinkte webpagina's te gaan is $\alpha/k + (1-\alpha)/N$ en $(1-\alpha)/N$, respectievelijk, met parameter α.

Vraag 1a)
Neem $N = 4$ en noem deze pagina's $j = 1, 2, 3, 4$. Pagina j heeft $k = j$ links. Geef de toestandsruimte en transitie-matrix van het boven beschreven Markov proces met daarbij de parameter restrictie. Teken ook het *state diagram* met daarin bijhorende overgangskansen.

Ga bij de resterende onderdelen van deze vraag uit van $N = 3$ en de volgende transitie-matrix :

$$\mathbf{P} \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\beta & \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\beta & \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\beta \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta & \beta & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\beta & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\beta \end{pmatrix}.$$

waarbij rijen- en kolommen-volgorde corresponderen met webpagina's $j = 1, 2, 3$. Merk op: deze transitie-matrix kent een andere parameterizatie (wat de betekenis van de elementen niet verandert).

Vraag 1b)
Heeft dit 1^{ste} orde Markov proces een stationaire verdeling? Zo ja, geef deze (veronderstel hierbij enkel voor deze deelvraag dat $\beta = \frac{1}{2}$).

Vraag 1c)
Het surfgedrag van een willekeurige individu laat de volgende sequentie aan bezochte webpagina's zien: `1, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3`. Gebruik de maximum likelihood methode om de parameter β op basis van dit surfgedrag te schatten. Veronderstel hierbij de kans om op webpagina $j = 1$ te beginnen gelijk aan 1.

Vraag 2 *(Phylogenetische bomen)*
Twee hedendaagse organismen met een binaire genetische code (bestaande uit nullen en éénen) hebben een gemeenschappelijke voorouder. Het substitutie-proces in een willekeurige locus volgt een 1^{ste} orde Markov proces. De kans op een substitutie is gelijk aan $\alpha = 25\%$. De t-staps

transitie-matrix is derhalve:

$$\mathbf{P}^{(t)} \;=\; \mathbf{P}^{t} \;=\; \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + (1-2\alpha)^{t} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

De stationaire verdeling van dit substitutie-proces is uniform.

Vraag 2a)
Slechts één generatie scheidt de organismen van hun gemeenschappelijk voorouder. De locus van beide hedendaagse organismen bevat een nul. Wat is dan de kans, onder stationariteit voor de gemeenschappelijke voorouder, dat de locus van de gemeenschappelijke voorouder ook door een nul bezet wordt?

Vraag 2b)
Twee generaties scheiden de organismen van hun gemeenschappelijk voorouder. Wat is de kans dat een locus van de hedendaagse organismen een verschillende (binaire) nucleotide bevat (neem hierbij wederom stationariteit voor de gemeenschappelijke voorouder aan)?

Vraag 2c)
Veronderstel het aantal generaties tussen de twee hedendaagse organismen en hun gemeenschappelijke voorouder onbekend. Beschouw nu twee onafhankelijke loci. De DNA sequenties van beide hedendaagse organismen bestaan enkel uit nullen, terwijl die van hun gemeenschappelijk voorouder enkel uit énen bestaat. Geef de likelihood voor deze data, en maximaliseer deze m.b.t. het aantal generaties. Neem wederom stationariteit voor de gemeenschappelijke voorouder aan.

Vraag 3
Beschouw een pathway van 4 genen. De expressie-niveau's van de vier genen worden gerepresenteerd door de random variabelen Y_1, Y_2, Y_3 en Y_4, welke gezamenlijk multivariaat normaal verdeeld zijn met $\boldsymbol{\mu} = (0,0,0,0)^{\top}$ en covariantie matrix:

$$\mathbf{\Sigma} \;=\; \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vraag 3a)
Laat (tijdelijk) het vierde gen buiten beschouwing (maar behoudt de namen van de andere genen). De gezamenlijke verdeling van de resterende drie genen wordt door hun marginale verdeling (i.e., negeer alle de elementen van $\boldsymbol{\mu}$ en $\mathbf{\Sigma}$ die een relatie met vierde gen hebben) gegeven. Bereken de partiële correlatie tussen Y_1 en Y_2.

Vraag 3b)
Laat (tijdelijk) het eerste gen buiten beschouwing (maar behoudt de namen van de andere genen). De gezamenlijke verdeling van de resterende drie genen wordt door hun marginale verdeling gegeven. Verklaar waarom de marginale en partiële correlatie tussen Y_2 en Y_3 gelijk aan elkaar zijn.

Vraag 3c)
Beschouw nu alle vier de genen. Bereken de partiële correlatie tussen Y_1 en Y_3.

FORMULE BLAD
Bij het tentamen kunnen de volgende formules handig zijn.

De inverse van een 2×2 matrix $\mathbf{A}$ met elementen $a_{j_1,j_2} = (\mathbf{A})_{j_1,j_2}$ is:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = [\det(\mathbf{A})]^{-1} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

met $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

De inverse van een 3×3 matrix $\mathbf{A}$ met elementen $a_{j_1,j_2} = (\mathbf{A})_{j_1,j_2}$ is:

$$\mathbf{A}^{-1} = [\det(\mathbf{A})]^{-1} \begin{pmatrix} a_{33}a_{22} - a_{32}a_{23} & -(a_{33}a_{12} - a_{32}a_{13}) & a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13} \\ -(a_{33}a_{21} - a_{31}a_{23}) & a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13} & -(a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}) \\ a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22} & -(a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12}) & a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}$$

met $\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{33}a_{22} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{33}a_{12} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13})$.

De dichtsheidsfunctie van de multivariaat normale verdeling van random variable $\mathbf{Y}$ is

$$f(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp[-(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})/2],$$

met $\boldsymbol{\mu}$ en $\boldsymbol{\Sigma}$ de verwachting en covariantie parameters, respectievelijk.

Indien een p-variate normaal verdeelde random variabele $\mathbf{Z}$ als volgt gepartitioneerd kan worden:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_X \\ \boldsymbol{\mu}_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{XX} & \boldsymbol{\Sigma}_{XY} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{YX} & \boldsymbol{\Sigma}_{YY} \end{pmatrix} \right),$$

dan wordt de conditionele verdeling van $\mathbf{Y}|\mathbf{X}$ gegeven door:

$$\mathbf{Y}|\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_Y + \boldsymbol{\Sigma}_{YX}\boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X), \boldsymbol{\Sigma}_{YY} - \boldsymbol{\Sigma}_{YX}\boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{XY}).$$

Zij A en B twee gebeurtenissen. De regel van Bayes zegt dan: $P(A \,|\, B) = P(B \,|\, A) \cdot P(A) \,/\, P(B)$.

Zij A en $B_1, \ldots, B_n$ gebeurtenissen z.d.d. $\sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$. De *total probability law* zegt dan:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A, B_i).$$

Zij $\mathbf{W}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ en $\mathbf{Z}$ random vectoren, $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ non-random matrices van geschikte dimensies, en c een constante. Dan geldt: $\text{Cov}(c, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$, $\text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = \text{Var}(\mathbf{Y})$, $\text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{0}$ als $\mathbf{Y}$ en $\mathbf{Z}$ onafhankelijk zijn, $\text{Cov}(\mathbf{AX}, \mathbf{BY}) = \mathbf{A}\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{B}^\top$, en

$$\text{Cov}(\mathbf{W} + \mathbf{X}, \mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \text{Cov}(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) + \text{Cov}(\mathbf{W}, \mathbf{Z}) + \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}).$$

Antwoorden
Antwoord op vraag 1
Vraag 1a
Pagina $j = 4$ heeft vier links, naar de andere drie en naar zichzelf. Pagina $j = 1$ heeft een link naar pagina $j = 4$ en verder niet. De enige manier om te zorgen dat pagina's $j = 2$ en $j = 3$ precies 3 links hebben, zonder de 'link degree' van de andere webpagina's te verstoren, is om deze te verbinden en $j = 3$ met zichzelf te laten linken. De transitie-matrix wordt dan:

$$\mathbf{P} \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\alpha \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\alpha \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\alpha & \frac{1}{4}+\frac{1}{12}\alpha & \frac{1}{4}+\frac{1}{12}\alpha & \frac{1}{4}+\frac{1}{12}\alpha \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

De rijen sommeren tot 1, zoals vereist. Verder, uit het feit dat elk element van $\mathbf{P}$ in het interval $[0,1]$ moet liggen, volgt de parameter-restrictie: $\alpha \in [0,1]$. Includeer ook het *state diagram.*

Vraag 1b
De transitie matrix wordt dus:

$$\mathbf{P} \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Ja, heeft stationaire verdeling: irreducibel en aperiodiek. Gebruik dan: $\boldsymbol{\varphi}^\top \mathbf{P} = \boldsymbol{\varphi}^\top$ en $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1$. Dit geeft het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 3\varphi_1 + 3\varphi_2 + 4\varphi_3 &= 12\varphi_1, \\ 3\varphi_1 + 6\varphi_2 + 6\varphi_3 &= 12\varphi_2, \\ 6\varphi_1 + 3\varphi_2 + 2\varphi_3 &= 12\varphi_3. \end{aligned}$$

Laat de laatste formule vervallen en herschrijf de eerste twee:

$$\begin{aligned} -9\varphi_1 + 3\varphi_2 + 4\varphi_3 &= 0, \\ 3\varphi_1 - 6\varphi_2 + 6\varphi_3 &= 0, \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 &= 1. \end{aligned}$$

Vermenigvuldig de laatste vergelijking met 9 en -3 en trek van de eerste en tweede (respectievelijk) vergelijk af:

$$\begin{aligned} 12\varphi_2 + 13\varphi_3 &= 9, \\ -9\varphi_2 + 3\varphi_3 &= -3. \end{aligned}$$

Oplossen levert: $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (14, 22, 15)/51$. Deze kansen liggen in het interval $(0,1)$ en sommeren tot een.

Merk op: dit had ook direct uit de symmetrie van $\mathbf{P}$ geconcludeerd kunnen worden: een irreducibele, aperiodieke Markov keten met een symmetrische transitie matrix heeft een uniforme stationaire verdeling.

Vraag 1c
De likelihood van deze sequentie wordt gegeven door: $P(X_1 = 1) \prod_{t=2}^{8} P(X_t \mid X_{t-1})$. Ofwel:

$1 \times (\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\beta) \times (\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\beta) \times (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta) \times (\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\beta) \times (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta) \times (\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\beta) \times (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta) = \times (\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\beta)^3 \times (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta)^3 \times (\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\beta)$. Neem de logaritme, deze is proportioneel aan: $3\log(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\beta)+3\log(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta)+\log(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\beta)$. Stel eerste orde afgeleiden naar β gelijk aan nul: $3/[3(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\beta)] - 3/[2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta)] + 1/(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\beta) = 0$. Vereenvoudigd: $3/(1+\beta) - 3/(1-\beta) + 6/(2-\beta) = 0$. De wortels zijn dezelfde als van: $0 = 3(2-\beta)(1-\beta) - 3(1+\beta)(2-\beta) + 6(1+\beta)(1-\beta) = 6 - 12\beta$. Oplossen levert: $\hat{\beta} = 1/2$.

Antwoord op vraag 2

Vraag 2a

Gebruikmakende van de definitie van conditionele kans, verkrijgen we:

$$\begin{aligned}
P(X^{(ca)}_{t=0} = 0 \,|\, X^{(1)}_{t=1} = 0, X^{(2)}_{t=1} = 0) &= P(X^{(1)}_{t=1} = 0, X^{(2)}_{t=1} = 0 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 0) P(X^{(ca)}_{t=0} = 0) \\
&\quad\; / P(X^{(1)}_{t=1} = 0, X^{(2)}_{t=1} = 0) \\
&= P(X^{(1)}_{t=1} = 0 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 0) P(X^{(2)}_{t=1} = 0 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 0) \\
&\quad\; \times P(X^{(ca)}_{t=0} = 0) / P(X^{(1)}_{t=1} = 0, X^{(2)}_{t=1} = 0) \\
&= (\tfrac{3}{4})^2 \tfrac{1}{2} / P(X^{(1)}_{t=1} = 0, X^{(2)}_{t=1} = 0).
\end{aligned}$$

Hierin, mbv de total probability law:

$$\begin{aligned}
P(X^{(1)}_{t=1} = 0, X^{(2)}_{t=1} = 0) &= P(X^{(1)}_{t=1} = 0, X^{(2)}_{t=1} = 0 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 0) P(X^{(ca)}_{t=0} = 0) \\
&\quad P(X^{(1)}_{t=1} = 0, X^{(2)}_{t=1} = 0 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 1) P(X^{(ca)}_{t=0} = 1) \\
&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4})^2.
\end{aligned}$$

Samengevoegd levert dit: $\frac{9}{10}$

Vraag 2b

$$\begin{aligned}
P(X^{(1)}_{t=2} \neq X^{(2)}_{t=2}) &= P(X^{(1)}_{t=2} = 0, X^{(2)}_{t=2} = 1) + P(X^{(1)}_{t=2} = 1, X^{(2)}_{t=2} = 0) \\
&= 2P(X^{(1)}_{t=2} = 0, X^{(2)}_{t=2} = 1) \\
&= 2[P(X^{(1)}_{t=2} = 0, X^{(2)}_{t=2} = 1 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 0) P(X^{(ca)}_{t=0} = 0) \\
&\quad + P(X^{(1)}_{t=2} = 0, X^{(2)}_{t=2} = 1 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 1) P(X^{(ca)}_{t=0} = 1)] \\
&= 2[P(X^{(1)}_{t=2} = 0 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 0) P(X^{(2)}_{t=2} = 1 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 0) P(X^{(ca)}_{t=0} = 0) \\
&\quad + P(X^{(1)}_{t=2} = 0 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 1) P(X^{(2)}_{t=2} = 1 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = 1) P(X^{(ca)}_{t=0} = 1)] \\
&= 2[\tfrac{5}{8}\tfrac{3}{8}\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8}\tfrac{5}{8}\tfrac{1}{2}] \;=\; \tfrac{15}{64}.
\end{aligned}$$

Vraag 2c

Gevraagd:

$$
\begin{aligned}
& P(X_{t1}^{(1)} = 0, X_{t2}^{(1)} = 0, X_{t1}^{(2)} = 0, X_{t2}^{(2)} = 0), X_{01}^{(ca)} = 1, X_{02}^{(ca)} = 1) \\
= \;& P(X_{t1}^{(1)} = 0, X_{t2}^{(1)} = 0, X_{t1}^{(2)} = 0, X_{t2}^{(2)} = 0) \,|\, X_{01}^{(ca)} = 1, X_{02}^{(ca)} = 1) \\
& \times P(X_{01}^{(ca)} = 1, X_{02}^{(ca)} = 1) \\
= \;& P(X_{t1}^{(1)} = 0, X_{t2}^{(1)} = 0 \,|\, X_{01}^{(ca)} = 1, X_{02}^{(ca)} = 1) \\
& \times P(X_{t1}^{(2)} = 0, X_{t2}^{(2)} = 0) \,|\, X_{01}^{(ca)} = 1, X_{02}^{(ca)} = 1) \\
& \times P(X_{01}^{(ca)} = 1, X_{02}^{(ca)} = 1) \\
= \;& P(X_{t1}^{(1)} = 0, \,|\, X_{01}^{(ca)} = 1) P(X_{t2}^{(1)} = 0 \,|\, X_{02}^{(ca)} = 1) \\
& \times P(X_{t1}^{(2)} = 0 \,|\, X_{01}^{(ca)} = 1) P(X_{t2}^{(2)} = 0) \,|\, X_{02}^{(ca)} = 1) \\
& \times P(X_{01}^{(ca)} = 1) P(X_{02}^{(ca)} = 1) \\
= \;& [\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(1 - 2\alpha)^t]^4 \times \tfrac{1}{4} \;\; = \;\; [\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^t]^4 \times \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Dit bereikt een maximum als t zo groot mogelijk is. Dus $t = \infty$.

Antwoord op vraag 3

Vraag 3a

De marginal covariantie matrix is dus:

$$
\mathbf{\Sigma} \;=\; \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.
$$

De inverse is:

$$
\mathbf{\Sigma}^{-1} \;=\; \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -12 & 28 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}.
$$

De gevraagde partiële correlatie is dus nu:

$$
\rho(Y_1, Y_2 \,|\, Y_3) \;=\; \frac{-(\mathbf{\Sigma}^{-1})_{1,2}}{\sqrt{(\mathbf{\Sigma}^{-1})_{1,2}}\sqrt{(\mathbf{\Sigma}^{-1})_{1,2}}} \;=\; \frac{12}{\sqrt{12}\sqrt{28}},
$$

waar bijdrage van de determinant wegvalt.

Vraag 3b

De marginal covariantie matrix is nu:

$$
\mathbf{\Sigma} \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

De marginale correlatie $\rho(Y_2, Y_3) = \frac{1}{2}$. De inverse heeft dezelfde blok structuur als de marginale covariantie matrix: $(\mathbf{\Sigma}^{-1})_{2,4} = 0 = (\mathbf{\Sigma}^{-1})3, 4$. Dit impliceert dat de corresponderende partiële correlaties $\rho(Y_2, Y_4 \,|\, Y_3)$ en $\rho(Y_3, Y_4 \,|\, Y_2)$ gelijk aan nul zijn, en dus dat Y_3 onhankelijk is van zowel

Y_2 en Y_3 gegeven de ander. Kortom, inclusie van Y_4 voegt niets toe aan het verklaren van de relatie tussen Y_2 en Y_3. De partiële correlatie $\rho(Y_2, Y_3 \,|\, Y_4) = \rho(Y_2, Y_3)$.

Vraag 3c
De partiële correlatie kan nu mbv de conditionele verdeling (gegeven op het formuleblad) berekend worden:

$$\mathbf{Z}|\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_Z + \boldsymbol{\Sigma}_{ZX}\boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X), \boldsymbol{\Sigma}_{ZZ} - \boldsymbol{\Sigma}_{ZX}\boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{XZ}),$$

waar $\mathbf{Z} = (Y_1, Y_3)^\top$ en $\mathbf{X} = (Y_2, Y_4)^\top$. Dus:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{ZZ} - \boldsymbol{\Sigma}_{ZX}\boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{XZ} &= \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dit impliceert dat de gevraagde partiële correlatie gelijk is aan nul (standardizatie verandert daar niets aan).