Department of Mathematics	Exam: Biomedische wiskunde
VU University Amsterdam	2018, Maart 27

NB. Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan, maar geen programmeerbare/grafische rekenmachine, mobiele telefoon of laptop. Succes!

Normering: 1a) 3, 1b) 3, 1c) 3, 2a) 3, 2b) 3, 2c) 3, 3a) 3, 3b) 3, 3c) 3.

Vraag 1 *(Markov modellen)*
De dagelijkse waterstand bij Lobith wordt met een 1^{ste} orde Markov keten gemodelleerd. Onder reguliere omstandigheden fluctueert de waterstand tussen een laag, normaal en hoog niveau. Met kans α neemt het niveau toe en met kans β af, maar het niveau kan ook gelijk blijven. Met kans γ is er een te veel aan smeltwater, welk een kritiek niveau kan vooroorzaken. Het is ongewis hoe lang dit kritieke niveau aanhoudt, elke dag kan het met kans δ zakken. Merk op: de fluctuaties zijn een geleidelijk proces en sprongen van meer dan één niveau komen niet voor.

Vraag 1a)
Geef de toestandsruimte en transitie-matrix van het boven beschreven Markov proces met daarbij de parameter restrictie. Teken ook het *state diagram* met daarin bijhorende overgangskansen.

Ga bij de resterende onderdelen van deze vraag uit van de volgende transitie-matrix :

$$\mathbf{P} \;=\; \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega & 0 & 0 \\ \omega & 1-2\omega & \omega & 0 \\ 0 & \omega & 1-2\omega & \omega \\ 0 & 0 & \xi & 1-\xi \end{pmatrix}.$$

waarbij rijen- en kolommen-volgorde corresponderen met oplopende waterstanden. Merk op: deze transitie-matrix kent een andere parameterizatie (wat de betekenis van de elementen niet verandert).

Vraag 1b)
Heeft dit 1^{ste} orde Markov proces een stationaire verdeling? Zo ja, geef deze.

Vraag 1c)
In januari zijn gedurende elf dagen de volgende waterstanden gemeten: `normaal`, `normaal`, `hoog`, `hoog`, `hoog`, `kritiek`, `kritiek`, `hoog`, `hoog`, `hoog`, `hoog`. Gebruik de maximum likelihood methode om de parameters ω en ξ op basis van deze observaties te schatten. Veronderstel hierbij de kans om op dag 1 met een normale waterstand te beginnen, gelijk aan 1.

Vraag 2 *(Phylogenetische bomen)*
Twee hedendaagse organismen met een binaire genetische code (bestaande uit nullen en éénen) hebben een gemeenschappelijke voorouder. Het substitutie-proces in een willekeurige locus volgt een 1^{ste} orde Markov proces. De 1-staps transitie-matrix van dit proces is:

$$\mathbf{P} \;=\; \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

De stationaire verdeling van dit substitutie-proces is $(\varphi_0, \varphi_1)^\top = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})^\top$.

Vraag 2a)
De gemeenschappelijk voorouder is een grootouder. Wat is de kans dat de hedendaagse organismen in een locus verschillen? Voor de verdeling `0`- en `1`-en in gemeenschappelijke voorouder mag de stationaire verdeling worden aangenomen.

Vraag 2b)
De gemeenschappelijk voorouder leefde heel (!) lang geleden. Beide hedendaagse organismen bevatten een `1`. Wat is de meest aannemelijk toestand van diezelfde locus in de gemeenschappelijke voorouder?

Vraag 2c)
Vooronderstel nu drie hedendaagse organismen, genaamd $S1$, $S2$, en $S3$ wier loci een `0`, `1` en `0`, respectievelijk, bevatten. De organismen hebben een gemeenschappelijke grootouder (!), maar enkel $S1$ en $S2$ delen ook dezelfde ouder. Geef de likelihood van de data. Voor de verdeling `0`- en `1`-en in gemeenschappelijke voorouder mag de stationaire verdeling worden aangenomen.

Vraag 3 *(Netwerken)*
Beschouw een pathway van 3 genen. De expressie niveaus van genen 1 en 2, aangeduid met random variabelen Y_1 en Y_2, volgen een bivariate verdeling:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

De expressie van het derde gen, Y_3, wordt gegeven door de regressie vergelijking: $Y_3 = \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \varepsilon$. De random variable ε, welk de ruis representeert, volgt een standaard normale verdeling en is onafhankelijk van zowel Y_1 als Y_2.

Vraag 3a)
Wat impliceert de relatie $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_3 \,|\, Y_2$ voor de coëfficiënten van de regressie-vergelijking $Y_3 = \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \varepsilon$ binnen dit 3-gen pathway?

Voor de resterende opgaven kan de relatie $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_3 \,|\, Y_2$ niet verondersteld worden. Wel geldt nu dat $\beta_1 = 1 = \beta_2$.

Vraag 3b)
Geef de verdeling van $Y_1 \,|\, Y_2, Y_3$ (neem hierbij aan dat $\mathbb{E}(Y_3) = 0$).

Vraag 3c)
Welke conclusies m.b.t. de conditionele onafhankelijkheden binnen het 3-gen pathway zijn gerechtvaardigd op basis van de bovenstaande informatie (vraag 3a dus niet meenemende)?

FORMULE BLAD
Bij het tentamen kunnen de volgende formules handig zijn.

De inverse van een 2×2 matrix $\mathbf{A}$ met elementen $a_{j_1,j_2} = (\mathbf{A})_{j_1,j_2}$ is:

$$\mathbf{A}^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = [\det(\mathbf{A})]^{-1} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

met $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

De inverse van een 3×3 matrix $\mathbf{A}$ met elementen $a_{j_1,j_2} = (\mathbf{A})_{j_1,j_2}$ is:

$$\mathbf{A}^{-1} = [\det(\mathbf{A})]^{-1} \begin{pmatrix} a_{33}a_{22} - a_{32}a_{23} & -(a_{33}a_{12} - a_{32}a_{13}) & a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13} \\ -(a_{33}a_{21} - a_{31}a_{23}) & a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13} & -(a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}) \\ a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22} & -(a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12}) & a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}$$

met $\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{33}a_{22} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{33}a_{12} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13})$.

De dichtsheidsfunctie van de multivariaat normale verdeling van random variable $\mathbf{Y}$ is

$$f(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp[-(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})/2],$$

met $\boldsymbol{\mu}$ en $\boldsymbol{\Sigma}$ de verwachting en covariantie parameters, respectievelijk.

Indien een p-variate normaal verdeelde random variabele $\mathbf{Z}$ als volgt gepartitioneerd kan worden:

$$\mathbf{Z} \quad = \quad \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_X \\ \boldsymbol{\mu}_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{XX} & \boldsymbol{\Sigma}_{XY} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{YX} & \boldsymbol{\Sigma}_{YY} \end{pmatrix} \right),$$

dan wordt de conditionele verdeling van $\mathbf{Y}|\mathbf{X}$ gegeven door:

$$\mathbf{Y}|\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_Y + \boldsymbol{\Sigma}_{YX}\boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X), \boldsymbol{\Sigma}_{YY} - \boldsymbol{\Sigma}_{YX}\boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{XY}).$$

Zij A en B twee gebeurtenissen. De regel van Bayes zegt dan: $P(A \mid B) = P(B \mid A) \cdot P(A) \,/\, P(B)$.

Zij A en $B_1, \ldots, B_n$ gebeurtenissen z.d.d. $\sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$. De *total probability law* zegt dan:

$$P(A) \quad = \quad \sum_{i=1}^n P(A, B_i).$$

Zij $\mathbf{W}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ en $\mathbf{Z}$ random vectoren, $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ non-random matrices van geschikte dimensies, en c een constante. Dan geldt: $\text{Cov}(c, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$, $\text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = \text{Var}(\mathbf{Y})$, $\text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{0}$ als $\mathbf{Y}$ en $\mathbf{Z}$ onafhankelijk zijn, $\text{Cov}(\mathbf{AX}, \mathbf{BY}) = \mathbf{A}\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{B}^\top$, en

$$\text{Cov}(\mathbf{W} + \mathbf{X}, \mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \text{Cov}(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) + \text{Cov}(\mathbf{W}, \mathbf{Z}) + \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}).$$

Antwoorden

Antwoord op vraag 1

Vraag 1a

De toestandsruimte is $\mathcal{S} = \{\texttt{laag}, \texttt{normaal}, \texttt{hoog}, \texttt{kritiek}\}$. De transitie-matrix wordt:

$$\mathbf{P} \;=\; \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 1-\alpha-\beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 1-\beta-\gamma & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & 1-\delta \end{pmatrix}.$$

De rijen sommeren tot 1, zoals vereist. Verder, uit het feit dat elk element van $\mathbf{P}$ in het interval $[0,1]$ moet liggen, volgt de parameter-restrictie: $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0,1]$, alsook $\alpha + \beta \leq 1$ en $\beta + \gamma \leq 1$. Includeer ook het *state diagram*.

Vraag 1b

Ja, heeft stationaire verdeling: irreducibel (na verloop van tijd kan elke toestand bereikt worden) en aperiodiek (geen toestand wordt met vaste regelmaat aangedaan). Gebruik dan: $\boldsymbol{\varphi}^\top \mathbf{P} = \boldsymbol{\varphi}^\top$ en $\varphi_\ell + \varphi_n + \varphi_h + \varphi_k = 1$. Dit geeft het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{aligned} (1-\omega)\varphi_\ell + \omega\varphi_n &= \varphi_\ell, \\ \omega\varphi_\ell + (1-2\omega)\varphi_n + \omega\varphi_h &= \varphi_n, \\ \omega\varphi_n + (1-2\omega)\varphi_h + \xi\varphi_k &= \varphi_h, \\ \omega\varphi_h + (1-\xi)\varphi_k &= \varphi_k, \\ \varphi_\ell + \varphi_n + \varphi_h + \varphi_k &= 1. \end{aligned}$$

Laat de middelste vergelijking vallen en herschrijf de eerste drie overgeblevene:

$$\begin{aligned} \omega\varphi_n &= \omega\varphi_\ell, \\ \omega\varphi_h &= -\omega\varphi_\ell + 2\omega\varphi_n, \\ \omega\varphi_h &= \xi\varphi_k, \\ \varphi_\ell + \varphi_n + \varphi_h + \varphi_k &= 1. \end{aligned}$$

Uit de eerste vergelijking volgt $\varphi_\ell = \varphi_n$. Substitueer dit in de tweede vergelijking en concludeer: $\varphi_\ell = \varphi_n = \varphi_h$. Gebruik dit vervolgens in de vierde vergelijk. We hebben nu het stelsel:

$$\begin{aligned} \omega\varphi_h &= \xi\varphi_k, \\ \varphi_k &= 1 - 3\varphi_\ell. \end{aligned}$$

Oplossen levert: $\varphi_\ell = \varphi_n = \varphi_h = \omega/(\xi + 3\omega)$ en $\varphi_k = \xi/(\xi + 3\omega)$. Deze kansen sommeren tot een.

Vraag 1c

De likelihood van deze sequentie wordt gegeven door: $P(X_1 = \texttt{n}) \prod_{t=2}^{10} P(X_t \,|\, X_{t-1})$. Oftewel, gebruikmakende van de gegeven transitiematrix $\mathbf{P}$: $1 \times (1-2\omega) \times \omega \times (1-2\omega) \times (1-2\omega) \times \omega \times (1-\xi) \times \xi \times (1-2\omega) \times (1-2\omega) \times (1-2\omega) = (1-2\omega)^6\omega^2(1-\xi)\xi$. Neem de logaritme, deze is proportioneel aan: $6\log(1-2\omega) + 2\log(\omega) + \log(1-\xi) + \log(\xi)$. Stel eerste orde afgeleiden naar ω en ξ gelijk aan nul: $\frac{-12}{1-2\omega} + \frac{2}{\omega} = 0$ en $\frac{-1}{1-\xi} + \frac{1}{\xi} = 0$. Oplossen levert: $\hat{\omega} = 1/8$ en $\hat{\xi} = 1/2$.

Antwoord op vraag 2

Vraag 2a

De grootouder vormt $t = 0$, de hedendaagse soorten leven dus op $t = 2$. We kijken naar 2-staps overgangskansen. Die worden gegeven door:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}.$$

Gebruikmakende van de totale kans wet en de definitie van de conditionele kans:

$$\begin{aligned}
P(X^{(1)}_{t=2} \neq X^{(2)}_{t=2}) &= P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{0}, X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{1}) + P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{1}, X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{0}) \\
&= \sum_{x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}} P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{0}, X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{1}, X^{(ca)}_{t=0} = x) \\
&\quad + \sum_{x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}} P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{1}, X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{0}, X^{(ca)}_{t=0} = x) \\
&= \sum_{x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}} P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{0}, X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{1} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) P(X^{(ca)}_{t=0} = x) \\
&\quad + \sum_{x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}} P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{1}, X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{0} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) P(X^{(ca)}_{t=0} = x) \\
&= \sum_{x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}} P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{0} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) P(X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{1} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) P(X^{(ca)}_{t=0} = x) \\
&\quad + \sum_{x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}} P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{1} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) P(X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{0} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) P(X^{(ca)}_{t=0} = x) \\
&= 2 \sum_{x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}} P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{0} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) P(X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{1} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) P(X^{(ca)}_{t=0} = x) \\
&= 2 \times [\tfrac{4}{7} \times 0.61 \times 0.39 + \tfrac{3}{7} \times 0.51 \times 0.48] \;=\; 0.4858286.
\end{aligned}$$

Vraag 2b
Gevraagd:

$$\arg \max_{x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}} P(X^{(ca)}_{t=0} = x \,|\, X^{(1)}_t = \mathtt{0}, X^{(2)}_t = \mathtt{1})$$

Merk op:

$$\mathbf{P}^t = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathtt{0}} & \varphi_{\mathtt{1}} \\ \varphi_{\mathtt{0}} & \varphi_{\mathtt{1}} \end{pmatrix}.$$

voor grote t. Dus:

$$\begin{aligned}
&P(X^{(ca)}_{t=0} = x \,|\, X^{(1)}_t = \mathtt{0}, X^{(2)}_t = \mathtt{1}) \\
&\quad = P(X^{(1)}_t = \mathtt{0}, X^{(2)}_t = \mathtt{1} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) \frac{P(X^{(ca)}_{t=0} = x)}{P(X^{(1)}_t = \mathtt{0}, X^{(2)}_t = \mathtt{1})} \\
&\quad = P(X^{(1)}_t = \mathtt{0} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) P(X^{(2)}_t = \mathtt{1} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x) \frac{P(X^{(ca)}_{t=0} = x)}{P(X^{(1)}_t = \mathtt{0}, X^{(2)}_t = \mathtt{1})} \\
&\quad = \frac{\varphi_{\mathtt{0}} \varphi_{\mathtt{1}} \varphi_{\mathtt{x}}}{P(X^{(1)}_t = \mathtt{0}, X^{(2)}_t = \mathtt{1})}.
\end{aligned}$$

Dit bereikt een maximum als $x = \mathtt{0}$ daar $\varphi_0 > \varphi_1$.

Vraag 2c
Gevraagd:

$$
\begin{aligned}
& P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{0}, X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{1}, X^{(3)}_{t=2} = \mathtt{0}) \\
= & \sum_{x_0, x_1 \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}} P(X^{(1)}_{t=2} = \mathtt{0} \,|\, X^{(i)}_{t=1} = x_1) P(X^{(2)}_{t=2} = \mathtt{1} \,|\, X^{(i)}_{t=1} = x_1) \\
& \qquad \times P(X^{(i)}_{t=1} = x_1 \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x_0) P(X^{(3)}_{t=2} = \mathtt{0} \,|\, X^{(ca)}_{t=0} = x_0) P(X^{(ca)}_{t=0} = x_0) \\
= & \; 0.7 \times 0.3 \times 0.7 \times 0.61 \times \tfrac{4}{7} + 0.4 \times 0.6 \times 0.3 \times 0.39 \times \tfrac{4}{7} + \\
& \; 0.7 \times 0.3 \times 0.4 \times 0.52 \times \tfrac{3}{7} + 0.4 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.48 \times \tfrac{3}{7} \\
= & \; 0.1156286.
\end{aligned}
$$

Antwoord op vraag 3
Vraag 3a
Dit conditioneel onafhankelijkheidsstatement impliceert dat de corresponderende partiële correlatie nul is. Daar de partiële correlaties en de regressie-coefficienten een één-op-één relatie hebben (i.h.b. als de een gelijk aan nul is, is de ander dat ook), is de corresponderende regressie-coefficient (hier β_1) ook gelijk aan nul. Merk op: over de ander β_2 weten we niets.

Vraag 3b
Bereken:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_2, Y_3) &= \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1 + Y_2 + \varepsilon_1) \\
&= \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1) + \mathrm{Cov}(Y_2, Y_2) + \mathrm{Cov}(Y_2, \varepsilon_1) \\
&= \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1) + \mathrm{Var}(Y_2, Y_2) \\
&= 3 + 4 \;=\; 7.
\end{aligned}
$$

en:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y_3) &= \mathrm{Cov}(Y_1 + Y_2 + \varepsilon_1, Y_1 + Y_2 + \varepsilon_1) \\
&= \mathrm{Var}(Y_1, Y_1) + \mathrm{Var}(Y_2, Y_2) + \mathrm{Var}(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + 2\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) + 2\mathrm{Cov}(Y_1, \varepsilon_1) + 2\mathrm{Cov}(Y_2, \varepsilon_1) \\
&= 3\tfrac{1}{2} + 4 + 1 + 2 \times 3 \;=\; 14\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Bovenstaande afleidingen gebruiken de onafhankelijkheid tussen ε_1 en Y_1 alswel Y_2. Net zo: $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_3) = 6\frac{1}{2}$.

De volledige multivariate verdeling is:

$$
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} & 3 & 6\frac{1}{2} \\ 3 & 4 & 7 \\ 6\frac{1}{2} & 7 & 14\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)
$$

De conditionele verdeling van $Y_1 | Y_2, Y_3$ gegeven door (zie formuleblad):

$$
Y_1 | Y_2, Y_3 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mathbf{\Sigma}_{1,23} \mathbf{\Sigma}^{-1}_{23,23} (\mathbf{Y}_{23} - \boldsymbol{\mu}_{23}), \mathbf{\Sigma}_{1,1} - \mathbf{\Sigma}_{1,23} \mathbf{\Sigma}^{-1}_{23,23} \mathbf{\Sigma}_{23,1}).
$$

Invullen levert:

$$Y_1|Y_2, Y_3 \quad \sim \quad \mathcal{N}(-\tfrac{2}{9}Y_2 + \tfrac{5}{9}Y_3, \tfrac{5}{9}).$$

Vraag 3c
Uit de opgave en bovenstaande opgaven volgt:

$$\mathbf{\Sigma} \quad = \quad \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} & 3 & 6\frac{1}{2} \\ 3 & 4 & 7 \\ 6\frac{1}{2} & 7 & 14\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Eenvoudig rekenwerk (welk beperkt kan worden tot de boven-diagonaal) levert:

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1.8 & -0.4 & -1.0 \\ -0.4 & 1.1 & -1.0 \\ -1.0 & -1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Daar de inverse covariantie matrix 1-op-1 relateert aan de partiele correlaties corresponderen de conditionele onafhankelijkheden met nullen in $\mathbf{\Sigma}^{-1}$. Dus, $Y_1 \not\perp\!\!\!\perp Y_3 \,|\, Y_2$, $Y_1 \not\perp\!\!\!\perp Y_3 \,|\, Y_2$, en $Y_2 \not\perp\!\!\!\perp Y_3 \,|\, Y_1$. Ofwel, er zijn geen conditionele onafhankelijkheden.